



Clase Auxiliar N° 6
27 de Abril de 2005

Pregunta 1

1. Sea (P) el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \max z &= 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \\ \text{s.a. } 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 &\leq 18 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolver utilizando simplex.

Pregunta 2 (Control 2 primavera 2003)

Sea el siguiente problema lineal en forma estándar:

$$\begin{aligned} \min z &= c^T \vec{x} \\ \text{s.a. } A\vec{x} &\leq \vec{b} \\ \vec{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Donde: $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con $n \geq m$; $rg(A) = m$; $b \in \mathbb{R}^m$; c y $x \in \mathbb{R}^n$, y sea B una base primal factible.

- a) Explique como el algoritmo simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar una iteración.
- b) Señale si el algoritmo simplex asegura en cada iteración la máxima variación posible de la función objetivo. ¿Por qué?. Si no lo asegura, explique como se podría lograr la máxima variación.
- c) ¿Cómo determina el algoritmo SIMPLEX si el vértice actual es una solución óptima del problema?
- d) Si el vértice actual es óptimo, ¿cómo se puede determinar a través del algoritmo si hay más de un óptimo?
- e) ¿Cómo determina el algoritmo SIMPLEX si el problema es no acotado?
- f) ¿Cuándo se dice que una solución básica es degenerada?
- g) Dar una cota superior (en función de n y m) para el número de soluciones básicas factibles distintas que pueden ser degeneradas? Justificar.

Problema 3

a) Se sabe que en una iteración cualquiera la variable x_s ingresará a la base y se conocen los coeficientes

$$\bar{a}_{i,s} \forall i$$

Se sabe además que x_s es variable básica. Explique qué situación se debe presentar para que x_s no cambie de valor al efectuarse la iteración.

b) Suponga que se ha resuelto un problema de programación lineal, siendo su solución óptima única.

Explique cómo se puede obtener, a partir de la solución óptima, la solución básica factible con valor de la función objetivo más próxima al valor óptimo de ella.

c) Como sabe usted que una forma canónica entrega una solución básica no factible?

Explique como resolvería usted un problema de programación lineal a partir de una forma básica no factible.

d) Sea el problema:

$$\begin{aligned} \min z &= c^T \vec{x} \\ \text{s.a. } A\vec{x} &\geq \vec{b} \\ \vec{x} &\leq 0 \end{aligned}$$

Plantee los criterios de entrada y salida de la base para el algoritmo simplex en este problema con variables no positivas.

Nota: Su respuesta puede no basarse en el cambio de variable $x_j = -x'_j$, con $x'_j \geq 0$

e) Suponga que usted dispone de una forma canónica que entrega una solución básica factible que no es óptima. Además usted conoce todos los costos modificados de la función objetivo en el óptimo. Explique cómo se pueden obtener los valores de las variables en la solución óptima a partir de la información anterior y sin tener que resolver el problema mediante una secuencia de iteraciones.

Dudas y/o consultas:

mapereir@ing.uchile.cl

bduarte@ing.uchile.cl



Pauta Auxiliar N° 6
27 de Abril de 2005

Pregunta 1

Primero se debe llevar el problema plateado a la forma canónica:

$$\begin{aligned} \min z &= c^T \vec{x} \\ \text{s.a. } A\vec{x} &\leq \vec{b} \\ \vec{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Para ello, se deben agregar variables de holgura (x_3 y x_4) al problema original y transformarlo en un problema de minimización, quedando como sigue:

$$\begin{aligned} \min z &= -3 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 18 \\ & x_1 + x_4 = 4 \\ & x_2 + x_5 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En este caso, las variables básicas son x_3 , x_4 y x_5 , y el problema matricialmente queda:

$$\begin{aligned} \min z &= (-3 \ -5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ \text{s.a.} \quad & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lo que corresponde a:

$$\min z = c_R \cdot \vec{x}_R + c_B \cdot \vec{x}_B$$

s.a.

$$R\vec{x}_R + B\vec{x}_B = \vec{b}$$

Veamos si ésta solución es óptima. Para ello, se deben calcular los costos reducidos como y si todos resultan positivos entonces estamos en el óptimo. Calculemos:

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R$$

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} -3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución no es óptima, entonces se debe empezar a iterar:

Iteración 1:

- Criterio de entrada.

Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, el menor costo reducido es -5 y corresponde a la variable x_2 , luego esta variable ingresa a la base.

- Criterio de salida.

Para ver quien sale de la base, es necesario obtener los valores de \bar{A} y de \bar{b} , para ello:

$$\bar{A} = B^{-1}R$$

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

Pero como $B = I$, por lo tanto $B^{-1} = I$, entonces:

$$\bar{A} = B^{-1}R = R$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = b$$

Utilizando estos valores se tiene:

$$\min_{a_{i2} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}}{a_{i2}} \right\} = \left\{ \frac{18}{2}, \frac{6}{1} \right\} = \{9, 6\} = 6 \mapsto x_5$$

Entonces x_5 sale de la base.

- Criterio de optimalidad.

Para poder evaluar la optimalidad de ésta nueva solución, se debe obtener su forma canónica.

$$\min z = (-30) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

s.a.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, con esta información veamos si es óptima esta solución:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución no es óptima, entonces se debe empezar a iterar.

Iteración 2:

- Criterio de entrada.

Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, el menor costo reducido es -3 y corresponde a la variable x_1 , luego esta variable ingresa a la base.

- Criterio de salida.

Para ver quien sale de la base, es necesario obtener los valores de \bar{A} y de \bar{b} , para ello:

$$\bar{A} = B^{-1}R$$

En este caso se tiene que:

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} = B^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Utilizando estos valores se tiene:

$$\min_{a_{i1} > 0} \left\{ \frac{\vec{b}}{a_{i1}} \right\} = \left\{ \frac{6}{3}, \frac{4}{1} \right\} = \{2, 4\} = 2 \mapsto x_3$$

Entonces x_3 sale de la base.

- Criterio de optimalidad.

Para poder evaluar la optimalidad de ésta nueva solución, se debe obtener su forma canónica

$$\min z = (00) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

s.a.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

se tiene que:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora con esta información veamos si es óptima la solución.

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego la solución encontrada es óptima, entonces se deja de iterar.

Pregunta 2

a) El Algoritmo simplex asegura no salirse del espacio de soluciones factibles al efectuar cada iteración respetando el criterio de entrada a la base.

En efecto, si se tiene que la variable que entra a la base es x_s , para saber cual es la variable que sale de la base es necesario determinar cual es la variable que primero se anula cuando x_s crece, para no salirse del espacio factible. Esto es buscar la primera variable que se anula en cada una de las restricciones del problema en su forma canónica:

$$x_i + \bar{a}_{is} \cdot x_s = \bar{b}_i \forall i = 1, \dots, m$$

Tomando en consideración las m restricciones el máximo valor que puede tomar x_s es

b) El criterio de entrada a la base indica que la variable no básica que entra es aquella que tiene el menor costo reducido, dentro de aquellos que son < 0 . Se ha adoptado esta convención porque trae el mayor mejoramiento local. Sin embargo al escoger esta variable de entrada se esta automáticamente determinando cual

será la variable básica que saldría de la base, y puede darse el caso que esta variable aportaba a la minimización de la función objetivo. Entonces para lograr la máxima variación habría que escoger como variable de entrada aquella que en conjunto con la variable que saldría impliquen la mayor variación en la función objetivo. Para esto es necesario probar todos los casos.

$$\min_{\bar{a}_{is} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\}$$

c) Un vértice será óptimo si todos los costos reducidos no básicos son mayores o iguales a 0. Para el problema planteado quiere decir que $\bar{c}_j \geq 0$ para todo j no básico, donde:

$$\bar{c}_j = c_j - c_B B^{-1} R_{\bullet j}$$

y R es tal que $A = [B | R]$

d) Si en el óptimo existe al menos una variable no básica con $\bar{c}_k = 0$, entonces el problema admite óptimos alternativos.

e) El problema es no acotado si $\bar{a}_s \leq 0$ donde $\bar{a}_s = B^{-1} R_{\bullet s}$ con $R_{\bullet s}$ columna de R (tal que $A = [B | R]$) que entra en la base de la iteración.

f) Una solución básica es degenerada cuando existe al menos una variable básica x_{s_r} igual a 0.

g) La cota superior del número de soluciones básicas factibles distintas es la forma de escoger m columnas de entre las n posibles de la matriz, esto corresponde a:

$$\binom{n}{m}$$

Problema 3

a) Sin perder generalidad, suponga que la variable x_r se obtiene de la k -ésima restricción. Para que x_r no cambie de valor al ingresar x_s a la base, se debe tener: $\bar{a}_{k,s} = 0$

b) Suponga que x_j es variable no básica en la solución óptima. Si x_j ingresara a la base deberá tomar el valor:

$$\min_{\bar{a}_{\bullet i}^* > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_j^*}{\bar{a}_{ji}^*} \right\} = \frac{\bar{b}_p^*}{\bar{a}_{pi}^*}$$

Sea $\bar{c}_i^* > 0$ el costo modificado o reducido de x_j en la última forma canónica. Luego al ingresar x_j a la base, la función objetivo aumentará en:

$$\bar{c}_i^* \frac{\bar{b}_p^*}{\bar{a}_{pi}^*} \quad (1)$$

Para toda variable no básica se debe obtener el resultado (1). El menor de estos resultados determinará la variable que ingresará a la base.

La variable que sale de la base se determina con el procedimiento habitual del algoritmo simplex.

Al ejecutar la iteración se obtendrá la solución básica factible pedida.

c) Si $\bar{b}_i < 0$ entonces la forma canónica entrega una solución básica no factible. Se debe agregar variables artificiales y desarrollar una fase 1 y luego la fase 2.

d) Criterio de entrada: $\max_{\bar{c}_j < 0} \{\bar{c}_j\} = \bar{c}_s$

Criterio de salida

$$\max_{\bar{a}_{is} < 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\}_s$$

e) Como se conocen los costos modificados de la F. O. en el óptimo se pueden identificar las variables no básicas en el óptimo y por tanto las variables básicas de la solución óptima. Si se conocen las variables básicas en el óptimo se puede definir la matriz básica del óptimo. Luego se puede calcular $\bar{b}^* = B^{*-1} b$

El vector \bar{b}^* contiene el valor de las variables básicas en el óptimo.

Dudas y/o consultas:
Marianela Pereira C.
mapereir@ing.uchile.cl