Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A Optimización
Profesor: Richard Weber
Guillermo Duran
Auxiliares: Blas Duarte
Marianela Pereira

Clase Auxiliar Nº 4
11 de Abril de 2005

Pregunta 1 (Control 1 Otoño 1999)

a) Justifique o rechace la siguiente afirmación:
"Un modelo matemático debe tener la mayor fidelidad representativa posible".

b) Describa brevemente en qué consiste la validación de un modelo matemático. ¿Qué curso de acción debe tomarse si un modelo no cumple la validación?.

c) Justifique la denominación de "método" para los procedimientos de optimización llamados método del gradiente y método de Newton.

d) Indique una ventaja y una desventaja del método de Newton frente al método del gradiente.

e) Señale bajo qué condiciones un óptimo de un problema de programación no lineal no cumple las condiciones de Kuhn-Tucker.

f) Suponga un punto que cumple las condiciones de Kuhn-Tucker. ¿Puede afirmarse que es un óptimo?. Analice las posibles situaciones.

Pregunta 2 (Control 1 otoño 2004)

Se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & y - x \\ \text{s.a.} & x^2 - y \geq 0 \\ & x^2 + y^2 \leq 2 \end{array}$$

1. Buscar el (los) óptimo(s) global(es) del problema a través del análisis gráfico y verifique numéricamente que cumple las condiciones de KKT.

2. Encuentre al menos 2 puntos que verifiquen KKT y no sean óptimos globales del problema. Por qué puede darse esta situación? Justifique con detalle todas las afirmaciones que realice.

3. Suponga que la primera restricción es modificada a $x^2 + y \leq 0$. Encuentre todos los puntos que verifiquen KKT. Son óptimos globales del problema? Justifique con detalle todas las afirmaciones que realice.

Problema 3 (Control 1 otoño 2004)

El connotado empresario gastronómico Armijo Catalán ha instalado un nuevo local de su cadena de restoranes BarZas. Para asegurar el éxito de este proyecto ha hecho un exhaustivo estudio de las condiciones del mercado, obteniendo los siguientes resultados:

Armijo ha definido N posibles platos a poner en el menú, cada uno tiene un costo de C_i por porción y se vendería a un precio P_i por porción. Además en esta lista existen platos muy parecidos entre si por lo que se pueden considerar sustitutos, el parámetro S_{ij} define este parentesco, siendo 0 si los platos i, j no son sustitutos y 1 si lo fueran. Armijo no quiere tener 2 platos sustitutos entre los escogidos.

Por otra parte, para atraer al publico Armijo cuenta con E espectáculos posibles para presentar en las noches, los cuales influyen directamente en la cantidad de publico que va al local y pide un plato. Así si Armijo escogiera el espectáculo k para la noche t, la demanda mínima de porciones del plato i seria $DMin_{tik}$ y la demanda máxima seria $DMax_{tik}$. Todas las noches debe haber uno o dos espectáculos, cuidando que si en una noche hay 2 espectáculos, entonces no puede haber otra noche con 2 espectáculos en los próximos 5 días. En una noche de 2 espectáculos las demandas mínimas y máximas corresponden a la suma de las demandas mínimas y máximas de cada espectáculo entregado esa noche. Cada espectáculo tiene un costo de $CosEsp_{tk}$ en el día t.

En base a estos datos Armijo le ha solicitado a usted que modele el problema como un problema de programación lineal mixto que maximice las utilidades y permita decidir los platos a colocar en el menú y los espectáculos a contratar para los próximos T días.

Dudas y/o consultas:
mapereir@ing.uchile.cl
bduarte@ing.uchile.cl

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A Optimización
Profesor: Richard Weber
Guillermo Duran
Auxiliares: Blas Duarte
Marianela Pereira

Pauta Auxiliar Nº 4
11 de Abril de 2005

Pregunta 1

a) Se Rechaza la afirmación.
La mayor fidelidad representativa implica una gran complejidad de modelo. Esto atenta contra una solución medianamente viable.

b) La validación consiste en verificar que el modelo matemático construido represente adecuadamente el problema por resolver.
La validación se puede hacer con datos históricos. En este caso el modelo debe representar la situación del sistema en la época histórica de los datos.
También la validación puede hacerse mediante modificaciones sustanciales de uno o más parámetro, cuyo resultado en la solución es perfectamente predecible.
Si el modelo no cumple la validación debe volverse a la etapa de modelamiento y luego a la resolución nuevamente para volver a validar finalmente.

c) En ambos casos no hay seguridad de encontrar el óptimo en un número finito de pasos.

d) Ventaja del método de Newton frente al gradiente es su mejor convergencia.
La desventaja más importante del método de Newton es que dependiendo del punto de partida y la función a optimizar este procedimiento puede alejarse del óptimo y no encontrarlo.
Esto nunca ocurre con el método del gradiente.

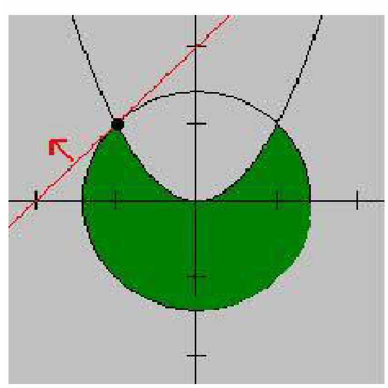
e) Si el óptimo no es regular no cumplirá Kuhn- Tucker.

f) Si un punto cumple Kuhn – Tucker no pude afirmarse que se óptimo local o global. Las condiciones son solo necesarias.

Pregunta 2

1. Veamos el análisis gráfico:

El punto óptimo es el (-1,1).



Verifiquemos las condiciones de KKT:

Llevemos al problema a la forma necesaria para aplicar KKT:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & x - y \\ \text{s.a.} & -x^2 + y \leq 0 \\ & x^2 + y^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

Ambas restricciones son activas en el óptimo, por lo tanto debe satisfacerse que

$$\nabla f(-1,1) + \mu_1 \nabla g_1(-1,1) + \mu_2 \nabla g_2(-1,1) = 0$$
$$\mu_1 g_1 = 0 \wedge \mu_2 g_2 = 0$$

$$\mu_1(-x^2 + y) = 0 \Rightarrow \mu_1 \in \Re$$
$$\mu_2(x^2 + y^2 - 2) = 0 \Rightarrow \mu_2 \in \Re$$

Así:

$$\nabla f(x,y) = (1,-1) \Rightarrow \nabla f(-1,1) = (1,-1)$$
$$\nabla g_1(x,y) = (-2x,1) \Rightarrow \nabla g_1(-1,1) = (2,1)$$
$$\nabla g_2(x,y) = (2x,2y) \Rightarrow \nabla g_2(-1,1) = (-2,2)$$

Luego tenemos:

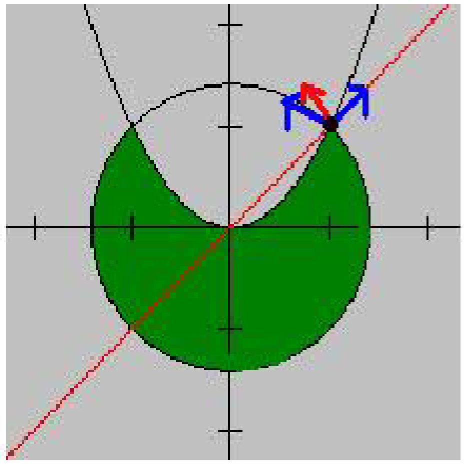
$$(1,-1) + \mu_1(2,1) + \mu_2(-2,2) = 0$$

El sistema queda:

$$2\mu_1 - 2\mu_2 = -1$$
$$\mu_1 + 2\mu_2 = 1$$
$$\mu_1 = 0, \mu_2 = \frac{1}{2}$$

Con esto el punto verifica KKT.

2. Existen solo 2 puntos, además del óptimo, que cumplen KKT, veámoslo gráficamente:



Vemos que el punto (1,1) cumple con KKT, verifiquémoslo numéricamente
En este punto ambas restricciones son activas, luego $\Rightarrow \mu_1 \wedge \mu_2 \in \Re$ (como en la parte 1). Se tiene también que:

$$\nabla f(1,1) = (1,-1)$$

$$\nabla g_1(1,1) = (-2,1)$$

$$\nabla g_2(1,1) = (2,2)$$

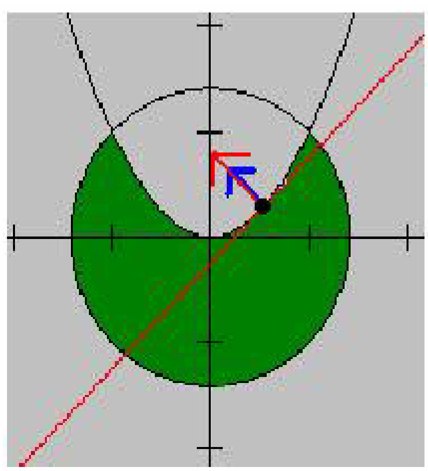
Así se tiene que:

$$-2\mu_1 + 2\mu_2 = -1$$

$$\mu_1 + 2\mu_2 = 1$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \frac{2}{3}, \mu_2 = \frac{1}{6}$$

Luego se verifica que el punto cumple KKT.



Para calcular el punto que lo cumple se pueden usar 2 formas:
-La primera dice que el punto viene dado por donde el gradiente de la función objetivo sea paralelo al de la primera restricción, o sea:

$$(1,-1)=\alpha(-2x,1)$$
$$\Rightarrow \alpha=-1$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Y como además el punto pertenece a la parábola, ¼ - y = 0 =» *y* = ¼

Finalmente el punto buscado es el (½, ¼).

-La segunda opción es encontrar el punto donde la función objetivo intersecta en un solo punto a la parábola, o sea se busca que:

$$y-x=a$$
$$x^2-y=0$$
$$\Rightarrow x^2=y$$

Luego

$$x^2-x-a=0$$

As, para que la intersección sea un solo punto *a* debe ser tal que la expresión anterior sea un cuadrado perfecto, luego *a* = ¼ con lo que nos queda:

$$(x-\frac{1}{2})^2=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Con esto $y = (½)^2 = ¼$, luego el punto que se busca es el (½, ¼).

Luego vemos del gráfico que el punto (½, ¼). cumple con KKT, verifiquémoslo numéricamente

En este punto solo la primera restricción es activa y la segunda inactiva, luego

$$\mu_1(-x^2+y)=0 \Rightarrow \mu_1 \in \Re$$
$$\mu_2(x^2+y^2-2)=0 \Rightarrow \mu_2=0$$

$$\nabla f(\frac{1}{2},\frac{1}{4})=(1,-1)$$

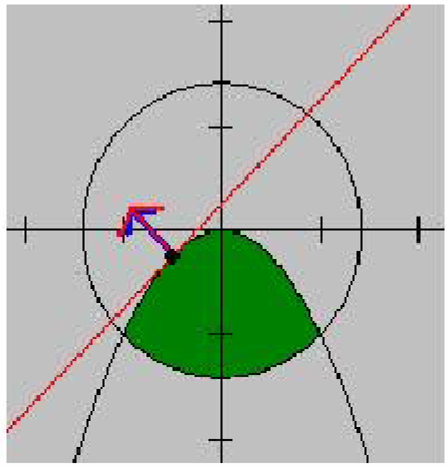
$$\nabla g_1(\frac{1}{2},\frac{1}{4})=(-1,1)$$

Así se tiene que con $\mu_1 = 1$ se cumple la condición de KKT.

Esta situación puede darse ya que la región factible no es convexa, lo cual se prueba de la siguiente forma:

Sabemos que los puntos (-1,1) y (1,1) pertenecen a la región factible, luego si fuera convexo cualquier punto de la recta λ(-1 , 1)+(1-λ)(1,1) debiera pertenecer a la región factible, tomemos $\lambda = ½$, con esto resulta el punto (0,1) que claramente no pertenece a la región factible ya que $0^2-1 = -1 < 0$ =» la región factible no es convexa.

3. En este caso tenemos solo un punto que cumple KKT, dado que la región factible y la función objetivo es convexa. El óptimo se muestra en la figura:



Para calcular el óptimo se pueden usar 2 formas:

- La primera dice que el óptimo viene dado por donde el gradiente de la función objetivo sea paralelo al de la primera restricción, o sea:

$$(1,-1) = \alpha(2x,1)$$
$$\Rightarrow \alpha = -1$$
$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Y como además el punto pertenece a la parábola, ¼ + y = 0 =» *y* = -¼

Finalmente el punto buscado es el (-½, -¼).

-La segunda opción es encontrar el punto donde la función objetivo intersecta en un solo punto a la parábola, o sea se busca que:

$$y - x = a$$
$$x^2 + y = 0$$
$$\Rightarrow x^2 = -y$$

Luego

$$x^2 + x + a = 0$$

As, para que la intersección sea un solo punto *a* debe ser tal que la expresión anterior sea un cuadrado perfecto, luego *a* = ¼ con lo que nos queda:

$$(x+\frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Con esto $y = -(½)^2 =- ¼$, luego el punto que se busca es el (-½, -¼).
Verifiquemos que cumple con KKT:

En este punto solo la primera restricción es activa y la segunda inactiva, por lo que directamente diremos que $\mu_1 \in \Re \wedge \mu_2 = 0$, luego tenemos:

$$\nabla g_1(x,y) = (2x,1)$$

Luego

$$\nabla f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}) = (1,-1)$$

$$\nabla g_1(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}) = (-1,1)$$

Así con $\mu_1 = 1$ se cumple la condición de KKT.

Como la región factible y la función objetivo son convexas, el punto encontrado es óptimo global.

Demostremos que la región factible y la función objetivo son convexas:

- Función Objetivo:

Calculemos el hessiano de la función objetivo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que es definido positivo (y negativo a la vez) por lo que la función es convexa.

- Región Factible:

Se puede usar cualquier método para demostrar la convexidad, por ejemplo se pueden tomar 2 puntos cualquiera de la región factible: (x , y) y (x', y'). Demostremos que cualquier punto de la recta $\lambda(x , y) + (1 - \lambda)(x', y')$ = con $\lambda \in [0 , 1]$ pertenece a la región factible.

Problema 3

Seguimos los pasos típicos:

1. **Variables de Decisión:**

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Sí se escoje el plato } i \text{ para poner en el menú} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Y_k^t = \begin{cases} 1 & \text{Sí se escoje el espectaculo } k \text{ para para el día } t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Z_i^t = \text{Cantidad de platos } i \text{ ha preparar el día } t$$

2. **Restricciones:**

a) No se pueden escoger 2 platos sustitutos para el menú

$$X_i + X_j \leq 2 - S_{ij} \quad \forall i, j = 0, \ldots, N$$

b) Se debe escoger como mínimo un espectáculo diario

$$\sum_{k=1}^{E} Y_k^t \geq 1 \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

c) Se debe escoger como máximo dos espectáculos diarios

$$\sum_{k=1}^{E} Y_k^t \leq 2 \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

d) No pueden haber noches de 2 espectaculos con una diferencia menor de 5 días

$$\sum_{p=t}^{t+5} \sum_{k=1}^{E} Y_k^p \leq 7 \quad \forall t = 1, \ldots, T - 5$$

e) Cubrir la demanda mínima de platos

$$Z_i^t \geq \sum_{k=1}^{E} DMin_{ik}^t Y_k^t \quad \forall i = 1, \ldots, N, \forall t = 1, \ldots, T$$

f) Cubrir la demanda máxima de platos

$$Z_i^t \leq \sum_{k=1}^{E} DMax_{ik}^t Y_k^t \quad \forall i = 1, \ldots, N, \forall t = 1, \ldots, T$$

g) Producir porciones de un plato, solo si así se decidió

$$Z_i^t \leq M X_i \quad \forall i = 1, \ldots, N, \forall t = 1, \ldots, T \qquad \text{con } M >> 0$$

$$M \text{ puede ser reemplazado por } \sum_{k=1}^{E} DMax_{ik}^t$$

h) Naturaleza de las variables

$$X_i, Y_k^t, Z_k \in \{0, 1\} \quad \forall i, k, t$$

$$Z_i^t \geq 0 \quad \forall i, t$$

3. **Función Objetivo:**

$$\text{máx Utilidades} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (P_i - C_i) Z_i^t - \sum_{k=1}^{E} \sum_{t=1}^{T} CosEsp_k^t Y_k^t$$