

**01 de Abril de 2005**  
**Pauta Auxiliar Extra**

**Problema 1**

Sea el problema:

$$\max f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\begin{aligned} s.a \quad & x_1 \leq 1 \\ & x_1 \geq -1 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Resuelva gráficamente el problema. Verifique el cumplimiento de las condiciones de Khun-Tucker en el óptimo.
2. Verifique si para los puntos  $(x_1 = 0; x_2 = 1)$  y  $(x_1 = 0; x_2 = 0)$  se cumplen las condiciones de Khun-Tucker. ¿Existen direcciones factibles para estos 2 puntos en los cuales se mejore el valor de la función objetivo?. Explique brevemente.

**Problema 2**

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(b) = \sum_{i=1}^N x_i \\ s.a. \quad & \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{a_i} \leq b \end{aligned}$$

Además considere que  $a_i > 0, \forall i = 1, \dots, N$ .

- a) Entregue una interpretación geométrica para el problema.
- b) Establezca las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker del problema.
- c) Encuentre un punto que satisfaga las condiciones de KKT. Es este punto un óptimo local o global?
- d) Encuentre una expresión para  $f(b)$ .

**Problema 3**

El próximo fin de semana se disputará el clásico futbolístico entre el equipo de los cruzados y el de los albos. Ante este magno evento, el alcalde de la ciudad Joaquín Castro, se ha dado cuenta que es una gran oportunidad para ganar adeptos a su próxima candidatura presidencial por lo que ha decidido ofrecer transporte gratuito a los hinchas de ambos equipos. Para ello, se dispuso

de una línea 800 a la que los hinchas pueden llamar para inscribirse en el servicio indicando en cual de los  $N$  paraderos posibles querían ser recogidos.

Las inscripciones ya han sido cerradas, entregando un balance de  $H_{ik}$  hinchas del equipo  $k$  que desean ser recogidos en el paradero  $i$ . El problema al que se enfrenta ahora el alcalde es diseñar el sistema de transporte que permita hacer el traslado desde los paraderos al estadio.

Se cuenta con  $M$  máquinas para realizar el transporte. Todas ellas deben participar en el traslado de los hinchas y cada máquina puede realizar solo un viaje (una vez que llega al estadio no puede volver a recoger pasajeros). Las máquinas corresponden a alguna de las  $T$  distintas tecnologías de transporte (buses grandes, buses pequeños, furgones, etc). Una máquina de tecnología  $t$  tiene una velocidad promedio de  $v_t$  [ km/hr ], una tasa de contaminación de  $s_t$  [ contaminantes/km ] y una capacidad de  $Q_t$  [ pax/máquina ]. Considere que se conocen los parámetros  $a_{mt}$  que vale 1 si la máquina  $m$  es de tecnología  $t$  y 0 en otro caso.

La distancia desde la garita donde se guarda la máquina  $m$  hasta el paradero  $i$  es  $B_{im}$  [km], la distancia entre el paradero  $i$  y el paradero  $j$  es  $C_{ij}$  [km] y la distancia entre el paradero  $i$  y el estadio es de  $D_i$  [km].

Las máquinas solo cobran por cantidad recorrida a razón de  $K_m$  [ \$ / km ].

Para poder diseñar el sistema de transporte existen una serie de restricciones técnicas que deben ser respetadas:

Ningún pasajero transportado al estadio puede demorar más de  $T_{max}$  [horas] desde que es recogido hasta que llega al estadio.

Para realizar el transporte el alcalde no puede gastar más de  $P$  [\$] que es lo que el consejo municipal aprobó, siendo la única fuente de ingresos a la que se puede recurrir.

En el tramo final desde un paradero hasta el estadio, debe existir una suerte de equilibrio entre la cantidad de hinchas de cada equipo. Si en alguna máquina hay  $\theta$  hinchas más de los albos que de los cruzados, con seguridad los primeros asaltarán a los segundos y esto no puede permitirse que ocurra por ningún motivo. Del mismo modo, si la cantidad de hinchas de los cruzados es mayor que la de los albos, no ocurre nada.

El sistema diseño puede contaminar todo lo quiera, pero si en conjunto se emiten más de  $S_{max}$  [contaminantes], entonces grupos ecologistas se enfadarán y provocarán la pérdida de 1000 votos. Finalmente, considere que cada hincha transportado, independiente del equipo de sus amores, ganará un voto y por cada hincha que se haya inscrito en la línea 800 y que no haya sido recogido se perderán 2 votos.

Formule un problema de programación lineal mixto que permita al alcalde diseñar el sistema de transporte que le haga aumentar la mayor cantidad posibles de votos.

**Hint:**

Suponga que los tiempos de trasbordo son despreciables y que las máquinas pueden circular en todo momento a su velocidad promedio.

Notar que una máquina dada puede pasar por varios paraderos a recoger hinchas antes de dirigirse al estadio.