01 de Abril de 2005
Pauta Auxiliar Extra

Problema 1

Sea el problema:

$$\text{máx } f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\begin{aligned} s.a \quad & x_1 \leq 1 \\ & x_1 \geq -1 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

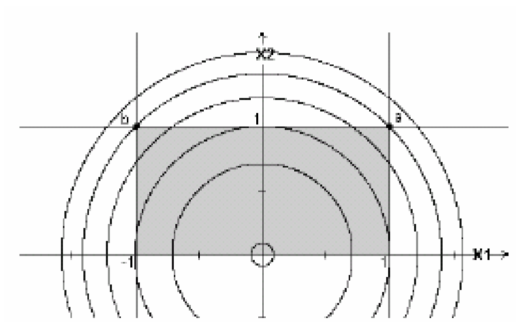
1. Resuelva gráficamente el problema. Verifique el cumplimiento de las condiciones de Khun-Tucker en el óptimo.

2. Verifique si para los puntos (x_1=0; x_2=1) y (x_1=0; x_2=0) se cumplen las condiciones de Khun-Tucker. ¿Existen direcciones factibles para estos 2 puntos en los cuales se mejore el valor de la función objetivo?. Explique brevemente.

Solución

1. Al resolver gráficamente, dibujando las curvas de nivel, podemos ver que los óptimos del problema vienen dados por a=(1,1) y b=(-1,1).

Gráficamente:



De las condiciones de KKT notamos 2 cosas:

a) Las condiciones están escritas para la forma estándar del problema, es decir, el problema es de minimización y las restricciones están escritas de la forma $g_i(\vec{x}) \leq 0$.

b) Claramente, antes de plantear las ecuaciones necesitamos conocer los gradientes de la función objetivo (∇f) y de las restricciones (∇g_i)

Entonces:

Escribimos el problema en forma estándar.

$$\text{mín} \quad \tilde{f} = -x_1^2 - x_2^2$$

$$\begin{array}{llcccl} s.a & g_1: & x_1 & & -1 & \leq & 0 \\ & g_2: & -x_1 & & -1 & \leq & 0 \\ & g_3: & & x_2 & -1 & \leq & 0 \\ & g_4: & & -x_2 & & \leq & 0 \end{array}$$

Calculamos los gradientes:

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_3(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_4(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos imponer las ecuaciones sobre los 2 puntos óptimos encontrados: a y b.

- A(1,1)
  - $\mu_1 \cdot (x_1^a - 1) = 0$. Como $x_1^a = 1 \Rightarrow (x_1^a) = 0$ y por tanto la condición se cumple $\forall \mu_1 \in R$ y no podemos decir nada más.
  - $\mu_2 \cdot (-x_1^a - 1) = 0$. Como $x_1^a = 1 \Rightarrow (x_1^a) = 2 \neq 0$ y por tanto la condición solo se cumple si $\mu_2 = 0$.
  - $\mu_3 \cdot (x_2^a - 1) = 0$. Análogamente al primer caso, $\mu_3 \in R$.
  - $\mu_4 \cdot (-x_2^a) = 0$ Análogamente al segundo caso, $\mu_4 = 0$.

  La otra condición:

  $$\begin{pmatrix} -2x_1^a \\ -2x_2^a \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Reemplazando los valores:

  $$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Resolviendo el sistema de ecuaciones:

  $\mu_1 = 2 \qquad \mu_2 = 0$

  $\mu_3 = 2 \qquad \mu_4 = 0$

  Como:

  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \geq 0 \Rightarrow$ se cumple la condición de KKT

- B(-1,1)

  - $\mu_1 \cdot (x_1^b - 1) = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$
  - $\mu_2 \cdot (-x_1^b - 1) = 0 \Rightarrow \mu_2 \in R$
  - $\mu_3 \cdot (x_2^b - 1) = 0 \Rightarrow \mu_3 \in R$
  - $\mu_4 \cdot (-x_2^b) = 0 \Rightarrow \mu_4 = 0$

  La otra condición:

  $$\begin{pmatrix} -2x_1^b \\ -2x_2^b \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Reemplazando los valores:

  $$\begin{pmatrix} +2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Resolviendo el sistema:

  $$\mu_1 = 0 \qquad \mu_2 = 2$$
  $$\mu_3 = 2 \qquad \mu_4 = 0$$

  Como:

  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \geq 0 \Rightarrow$ se cumple la condición de KKT

2. Para verificar las condiciones de KKT, el sistema a resolver es el mismo anterior, pero evaluando en otros puntos.

- (0,1)

  - $\mu_1 \cdot (0 - 1) = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$
  - $\mu_2 \cdot (-0 - 1) = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0$
  - $\mu_3 \cdot (1 - 1) = 0 \Rightarrow \mu_3 \in R$
  - $\mu_4 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \mu_4 = 0$

La otra condición (evaluada inmediatamente):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$\mu_3 = 2$ Como $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \geq 0 \Rightarrow$ se cumple la condición de KKT para el punto

- (0,0)

  - $\mu_1 \cdot (0 - 1) = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$
  - $\mu_2 \cdot (-0 - 1) = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0$
  - $\mu_3 \cdot (0 - 1) = 0 \Rightarrow \mu_3 = 0$
  - $\mu_4 \cdot (-0) = 0 \Rightarrow \mu_4 \in R$

La otra condición (evaluada inmediatamente):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

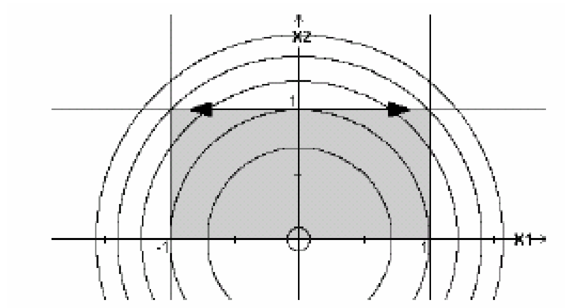
Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$\mu_4 = 0$ Como $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \geq 0 \Rightarrow$ se cumple la condición de KKT para el punto (0,1).

Con respecto a las direcciones factibles, debemos decir que una dirección factible es aquella dirección (vector) que al movernos *un poco* (diferencial) sobre ella no nos *saldremos* del conjunto factible. Así, las direcciones factibles que mejoren el valor de la función objetivo las podemos hallar gráficamente:

- (0,1)

Este punto no es óptimo local porque existen direcciones factibles que mejoran la función objetivo, siendo estas las direcciones (1,0) y (-1,0) como lo indica el dibujo.



- (0,0)

Este punto tampoco es óptimo local porque también existen direcciones factibles que mejoran la función objetivo, siendo estas todas las direcciones factibles como lo indica el dibujo (el punto es un mínimo).

Problema 2

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\max \ f(b) = \sum_{i=1}^{N} x_i \\ &s.a. \\ &\qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{a_i} \leq b \end{aligned}$$

Además considere que $a_i > 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, N$.

a) Entregue una interpretación geométrica para el problema.

b) Establezca las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker del problema.

c) Encuentre un punto que satisfaga las condiciones de KKT. Es este punto un óptimo local o global?

d) Encuentre una expresión para f(b).

Solución

a) El espacio de soluciones son los puntos contenidos en un elipsoide. El problema consiste en encontrar un hiperplano tangente con vector normal 1.

b) Las condiciones de KKT son las siguientes:

$$-1 + 2 \cdot \mu \frac{x_i}{a_i} = 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, N\}$$

$$\mu(\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{a_i} - b) = 0$$

$$\mu \geq 0$$

c) De inmediato vemos que:

$$x_i = \frac{a_i}{2\mu} \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\}$$

es una solución que cumple con la primera condición de KKT. Vemos que μ es distinto de 0 (directo de las ecuaciones anteriores).

d) Arreglamos los términos, multiplicamos la i-ésima ecuación por a_i y luego sumamos.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 2\mu f(b)$$

Arreglamos los términos y luego multiplicamos por x_i, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = f(b) = 2\mu \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{a_i} = 2\mu b$$

Entonces,

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} a_i}{b}}$$

por lo tanto, reemplazando en los valores anteriores

$$x_i = a_i \sqrt{\frac{b}{\sum_{i=1}^{N} a_i}}$$

Luego, finalmente

$$f(b) = \sqrt{b \sum_{i=1}^{N} a_i}$$

Problema 3

El próximo fin de semana se disputará el clásico futbolístico entre el equipo de los cruzados y el de los albos. Ante este magno evento, el alcalde de la ciudad Joaquín Castro, se ha dado cuenta que es una gran oportunidad para ganar adeptos a su próxima candidatura presidencial por lo que ha decidido ofrecer transporte gratuito a los hinchas de ambos equipos. Para ello, se dispuso de una línea 800 a la que los hinchas pueden llamar para inscribirse en el servicio indicando en cual de los *N* paraderos posibles querían ser recogidos.

Las inscripciones ya han sido cerradas, entregando un balance de H_{ik} hinchas del equipo *k* que desean ser recogidos en el paradero *i*. El problema al que se enfrenta ahora el alcalde es diseñar el sistema de transporte que permita hacer el traslado desde los paraderos al estadio.

Se cuenta con *M* máquinas para realizar el transporte. Todas ellas deben participar en el traslado de los hinchas y cada máquina puede realizar solo un viaje (una vez que llega al estadio no puede volver a recoger pasajeros). Las máquinas corresponden a alguna de las T distintas tecnologías de transporte (buses grandes, buses pequeños, furgones, etc). Una máquina de tecnología t tiene una velocidad promedio de v_t [*km/hr*], una tasa de contaminación de s_t [*contaminantes/km*] y una capacidad de Q_t [*pax/máquina*]. Considere que se conocen los parámetros a_{mt} que vale 1 si la máquina m es de tecnología t y 0 en otro caso.

La distancia desde la garita donde se guarda la máquina m hasta el paradero i es B_{im} [km], la distancia entre el paradero i y el paradero j es C_{ij} [km] y la distancia entre el paradero i y el estadio es de D_i [km].

Las máquinas solo cobran por cantidad recorrida a razón de K_m [$ / *km*].

Para poder diseñar el sistema de transporte existen una serie de restricciones técnicas que deben ser respetadas:

Ningún pasajero transportado al estadio puede demorar más de T_{max} [horas] desde que es recogido hasta que llega al estadio.

Para realizar el transporte el alcalde no puede gastar más de P [$] que es lo que el consejo municipal aprobó, siendo la única fuente de ingresos a la que se puede recurrir.

En el tramo final desde un paradero hasta el estadio, debe existir una suerte de equilibrio entre la cantidad de hinchas de cada equipo. Si en alguna máquina hay θ hinchas más de los albos que de los cruzados, con seguridad los primeros asaltarán a los segundos y esto no puede permitirse que ocurra por ningún motivo. Del mismo modo, si la cantidad de hinchas de los cruzados es mayor que la de los albos, no ocurre nada.

El sistema diseño puede contaminar todo lo quiera, pero si en conjunto se emiten más de S_{max} [contaminantes], entonces grupos ecologistas se enfadarán y provocarán la pérdida de 1000 votos. Finalmente, considere que cada hincha transportado, independiente del equipo de sus amores, ganará un voto y por cada hincha que se haya inscrito en la línea 800 y que no haya sido recogido se perderán 2 votos.

Formule un problema de programación lineal mixto que permita al alcalde diseñar el sistema de transporte que le haga aumentar la mayor cantidad posibles de votos.

Hint:

Suponga que los tiempos de trasbordo son despreciables y que las máquinas pueden circular en todo momento a su velocidad promedio.

Notar que una máquina dada puede pasar por varios paraderos a recoger hinchas antes de dirigirse al estadio.

Solución

Variables de Decisión:

x_{im}	:	si la máquina m viaja desde su garita hasta el paradero i
y_{ijm}	:	si la máquina m viaja desde el paradero i al paradero j
z_{im}	:	si la máquina m viaja desde el paradero i hasta el estadio
γ	:	si son sobrepasadas las S_{max} unidades de contaminante emitidos
p_{ikm}	:	cantidad de pasajeros del equipo k asignados a la máquina m en el paradero i

Restricciones:

1. Conservación de flujo en las máquinas (continuidad de la ruta).

$$x_{im} + \sum_{j=1}^{N} y_{jim} = \sum_{j=1}^{N} y_{ijm} + z_{im} \qquad \forall\ i, m$$

2. No llevar más pasajeros que la capacidad permitida en cada máquina.

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{2} p_{ikm} \leq \sum_{t=1}^{T} a_{tm} \cdot Q_t \qquad \forall\ m$$

3. No transportar más pasajeros que los que se encuentran en cada paradero.

$$\sum_{m=1}^{M} p_{ikm} \leq H_{ik} \qquad \forall\ i, k$$

4. Condicionar la demora máxima de los pasajeros a la demora del peor caso, o sea, el primer tipo que se sube a la máquina.

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} a_{tm} \cdot \frac{C_{ij}}{v_t} \cdot y_{ijm} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} a_{tm} \cdot \frac{D_i}{v_t} \cdot z_{im} \leq T_{max} \qquad \forall\ m$$

5. Restricción presupuestaria.

$$\sum_{m=1}^{M} K_m \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} B_i \cdot x_{im} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \cdot y_{ijm} + \sum_{i=1}^{N} D_i \cdot z_{im} \right) \leq P$$

6. Equilibrio mínimo entre hinchas (1=CC y 2=UC) en tramo final al estadio.

$$\sum_{i=1}^{N} p_{i1m} - \sum_{i=1}^{N} p_{i2m} \leq \theta \qquad \forall\ m$$

7. No subir pasajeros a una máquina si ésta no pasa por el paradero.

$$p_{ikm} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} x_{im} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} y_{ijm} \right) \cdot Hik$$

8. Cada máquina debe hacer sólo un viaje, o sea, salir de la garita exactamente una vez.

$$\sum_{i=1}^{N} x_{im} = 1 \qquad \forall\ m$$

9. Desde cada paradero se sale a lo más a un paradero.

$$\sum_{j=1}^{N} y_{ijm} \leq 1 \qquad \forall\ i, m$$

10. Relación lógica entre γ y los viajes realizados.

$$\mu \leq (1-\gamma) \cdot S_{max} + \gamma \cdot M$$

con:

$$\mu = \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} a_{tm} \cdot B_i \cdot s_t \cdot x_{im} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} a_{tm} \cdot C_{ij} \cdot s_t \cdot y_{ijm} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} a_{tm} \cdot D_i \cdot s_t \cdot z_{im} \right)$$

$$M = \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} a_{tm} \cdot B_i \cdot s_t + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} a_{tm} \cdot C_{ij} \cdot s_t + \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} a_{tm} \cdot D_i \cdot s_t \right)$$

11. Naturaleza de las variables.

$$\begin{gathered} x_{im} \in \{0,1\} \qquad \forall\ i, m \\ y_{ijm} \in \{0,1\} \qquad \forall\ i, j, m \\ z_{im} \in \{0,1\} \qquad \forall\ i, m \\ \gamma \in \{0,1\} \\ p_{ikm} \geq 0 \qquad \forall\ i, k, m \end{gathered}$$

Función Objetivo:

$$\text{máx}\, Votos = \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{2} p_{ikm} - 2 \cdot \left(\sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} H_{ik} - \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{2} p_{ikm} \right) - 1000 \cdot \gamma$$