Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A Optimización
Semestre Otoño 2005

Profesor: Guillermo Duran
Richard Weber

Auxiliares: Blas Duarte
Marianela Pereira

Auxiliar Nº 1
Pauta
16 de Marzo de 2005

Pregunta 1 (Fácil)

Un comerciante compra azúcar a granel y vende al detalle. Para venderla tiene dos alternativas: envases de 1 kg y envases de 5 kg. El precio de venta es \$300 y \$250 por kg respectivamente, y en el mercado del azúcar al detalle se pueden vender 20.000 kg en envases de 1 kg y 17.000 en envases de 5 kg.

Debido a un contrato anterior se deben entregar 5.000 kg en envases de 5 kg a un determinado cliente.

El comerciante se puede abastecer de azúcar desde dos proveedores. El primero le puede vender hasta 15.000 kg a un precio de \$90 por kg, y el segundo le ofrece la cantidad de azúcar que el comerciante desee, pero a un precio de \$110 por kg y debido a requerimientos de sus distribuidores el comerciante debe vender menos del tercio del azúcar en envases de 1 kg.

Además, suponga que el precio de los envases y el proceso de envasado son nulos, y que el comerciante no tiene azúcar almacenada y vende todo el azúcar que compra.

Formule un problema de programación lineal que permita al comerciante decidir cual es el plan de abastecimiento y ventas de modo de obtener el mayor beneficio en su negocio.

Pauta Problema 1

Variables de Decisión

- X_1 = Cantidad de envases de un 1 kg que vende el comerciante.
- X_2 = Cantidad de envases de un 5 kg que vende el comerciante.
- Y_1 = Cantidad de azúcar que compra el comerciante al proveedor 1.
- Y_2 = Cantidad de azúcar que compra el comerciante al proveedor 2.

Restricciones

1. Limite superior de la demanda

Azúcar en envases de 1 kg: $X_1 \leq 20.000$

Azúcar en envases de 5 kg: $X_2 \leq \dfrac{22.000}{5}$

2. Satisfacer compromisos previos

$$X_2 \geq \frac{5.000}{5}$$

3. Venta máxima del proveedor 1

$$Y_1 \leq 15.000$$

4. Requerimientos de los distribuidores

$$X_1 \leq \frac{Y_1 + Y_2}{3}$$

5. No existe almacenamiento (o todo lo que se envasa se vende)

$$X_1 + 5X_2 = Y_1 + Y_2$$

6. No negatividad

$$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \geq 0$$

Función Objetivo

$$\max z = 300X_1 + 250X_2 - 90Y_1 - 110Y_2$$

Pregunta 2 (Medio – Fácil)

La oficina técnica de cultivos (OTCC), tiene a su cargo la administración de 3 parcelas. El rendimiento agrícola de cada parcela esta limitado tanto por la cantidad de tierra cultivable como por la cantidad de agua asignada para regadío de la parcela por la comisión de aguas. Los datos proporcionados por este organismo son
los siguientes:

Parcela	Tierra Cultivable [Há]	Asignación de agua [m^3]
1	400	600
2	600	800
3	300	375

Las especies disponibles para el cultivo son la remolacha, trigo y maravilla, pero el ministerio de agricultura ha establecido un número máximo de hectáreas que pueden dedicarse a cada uno de estos cultivos en las 3 parcelas en conjunto, como muestra la siguiente tabla:

Especie	Consumo de Agua [m^3/Há]	Cuota Máxima [Há]	Ganancia Neta [$/Há]
Remolacha	3	600	400
Trigo	2	500	300
Maravilla	1	325	100

Los dueños de las parcelas, en un acto de solidaridad social, han convenido que en cada parcela se sembrará la misma fracción de su tierra cultivable. Sin embargo, puede cultivarse cualquier combinación en cualquiera de las praderas.

La tarea que encara la OTCC es plantear cuantas hectáreas se deben dedicar al cultivo de las distintas especies en cada parcela, de modo de maximizar la ganancia neta total para todas las parcelas a cargo de la OTCC.

Problema 2

Variables de Decisión

- X_{iR} = Cantidad de hectáreas sembradas con remolacha en la parcela i (i = 1,2,3).
- X_{iT} = Cantidad de hectáreas sembradas con trigo en la parcela i (i = 1,2,3).
- X_{iM} = Cantidad de hectáreas sembradas con maravilla en la parcela i (i = 1,2,3).

Restricciones

1. Cantidad máxima de tierra cultivable

$$\sum_{j=R,T,M} X_{1j} \leq 400$$

$$\sum_{j=R,T,M} X_{2j} \leq 600$$

$$\sum_{j=R,T,M} X_{3j} \leq 300$$

2. Asignación máxima de agua de regadío

$$3X_{1R} + 2X_{1T} + 3X_{1M} \leq 600$$

$$3X_{2R} + 2X_{2T} + 3X_{2M} \leq 800$$

$$3X_{3R} + 2X_{3T} + 3X_{3M} \leq 375$$

3. Cuota máxima de plantación por especie

$$\sum_{i=1}^{3} X_{iR} \leq 600$$

$$\sum_{i=1}^{3} X_{iT} \leq 500$$

$$\sum_{i=1}^{3} X_{iM} \leq 325$$

4. Acuerdo de los dueños de parcelas

$$\frac{\sum_{j=R,T,M} X_{1j}}{400} = \frac{\sum_{j=R,T,M} X_{2j}}{600}$$

$$\frac{\sum_{j=R,T,M} X_{2j}}{600} = \frac{\sum_{j=R,T,M} X_{3j}}{300}$$

5. No negatividad

$X_{ij} \geq 0$ con i = 1, 2, 3 y j = R, T, M

Función Objetivo

$$\max z = 400\sum_{i=1}^{3} X_{iR} + 300\sum_{i=1}^{3} X_{iT} + 100\sum_{i=1}^{3} X_{iM}$$

Pregunta 3 (Extraño)

La empresa de productos GOLO S.A desea determinar su plan de producción y distribución para los próximos T días. Esta empresa posee K plantas productoras, en cada una de las cuales puede producirse N tipos de productos distintos. Una vez producidos, estos productos deben ser despachados inmediatamente a las bodegas de almacenamiento que se encuentran exactamente en el mismo lugar de la planta (en cada planta hay una bodega adyacente). Los productos son mantenidos en bodega hasta que son enviados a alguno de los I supermercados (centros de venta) disponibles y para ello tienen 2 posibilidades de vías de transporte las cuales difieren en costo y rapidez.

Para el desarrollo del modelo considere los siguientes elementos:

K_{kn}	Capacidad diaria (kg) de producción del producto n en la planta k.
F_n	Volumen (m^3) ocupado por 1 kg. de producto n.
M_k	Costo diario de mantención (en \$/u.d.p.) de inventario en la bodega k.
B_n	Costo unitario (\$) de elaboración del producto n.
D_{ni}	Demanda diaria (kg) del producto n en el supermercado i.
H_k	Capacidad (m^3) de la bodega asociada a la planta k.
C_{ijkt}	Costo unitario de transporte (\$/m^3) desde bodega k hacia el supermercado i por la vía de transporte j en el día t.

Para efectos del modelo, considere que el tiempo de transporte desde cualquier supermercado es de 1 día si se elige la vía de transporte 1 (j=1) y de 2 días si se elige la vía de transporte 2 (j=2). Además, suponga que cada bodega tiene un inventario inicial nulo para todos sus productos.

1. Formule un modelo de programación lineal que le permita a GOLO S.A encontrar su plan de producción y distribución a mínimo costo satisfaciendo los requerimientos descritos.

2. Suponga que los productos son perecibles y que el tiempo máximo que puede pasar entre la producción y la llegada al supermercado para un producto son 5 días. Reformule el problema internalizando esta nueva restricción.

Problema 3

Variables de Decisión

x_n^{tk} = Cantidad (kg) del producto n, que se produce en la planta k en el día t

y_{nj}^{tik} = Cantidad (kg) del producto n, que se envía desde la bodega k hacia el supermercado i por la vía j en el día t.

z_n^{tk} = Inventario (kg) del producto n en la bodega k, al final del día t

Conjunto de índices:

n=1,2,…..,N
j=1,2
t=1,2,.....,T
i=1,2,…….,I
k=1,2,…..,K

En un problema de optimización pueden existir varias formas alternativas de definir las variables de decisión. Así por ejemplo, en este problema, podría haberse omitido la variable de inventario pues queda determinada implícitamente por la producción y los despachos. Sin embargo, se incluye por claridad de resolución. Notar que al incluir esta variable, debemos agregar una restricción que una lógicamente las variables en cuestión. Lo relevante son los *grados de libertad del problema*.

En general, la forma en que escojamos nuestras variables hará que sea más fácil o más difícil el planteamiento de las restricciones y función objetivo.

Restricciones

1. Capacidad productiva de la planta.

$$x_n^{tk} \leq K_{kn} \qquad \forall t,k,n$$

2. Capacidad de Almacenaje en Bodega.

$$\sum_{n=1}^{N} F_n z_n^{tk} \leq H_k \qquad \forall t,k$$

3. Satisfacción de Demanda de Supermercados.

$$\sum_{k=1}^{K} y_{n1}^{tik} + \sum_{k=1}^{K} y_{n2}^{t-1ik} \geq D_{ni} \qquad \forall n,i,t$$

4. Balance de Flujos de Inventario.

$$z_n^{t-1k} + x_n^{tk} - \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{I} y_{nj}^{tik} = z_n^{tk} \qquad \forall t,k,n$$

5. Factibilidad de los despachos.

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{I} y_{jn}^{tik} \leq z_n^{t-1k} + x_n^{tk} \qquad \forall n,i,t$$

6. Condición de Borde.

$$z_n^{0k} = 0 \qquad \forall k,n$$

7. Naturaleza de las variables.

$$\begin{array}{l} x_n^{tk} \geq 0 \\ y_{nj}^{tik} \geq 0 \qquad \forall i,j,n,k,t \\ z_n^{tk} \geq 0 \end{array}$$

Función Objetivo

$$\min F = \sum_{n,t,k} B_n x_n^{tk} + \sum_{i,j,n,t,k} C_{ijtk} F_n y_{nj}^{tik} + \sum_{n,t,k} M_k z_n^{tk}$$

Dudas y Comentarios a:

bduarte@ing.uchile.cl
mapereir@ing.uchile.cl