

## Algunos ejercicios resueltos de Relatividad Especial.

1. Un astronauta que se aleja de la Tierra a velocidad  $u$  tiene su reloj sincronizado con un observador terrestre, quien observa los dos relojes simultáneamente con un telescopio. ¿Qué lee cuando el astronauta lee una hora?

**Respuesta** Lo ideal es definir los eventos de importancia y luego convertirlos a partir de las transformaciones de Lorentz apropiadas. Si se puede ahorrar trabajo a través de los conceptos de tiempo propio y demases, mejor. Así, cuando el astronauta tiene una hora medida ( $t' = 1h$ ), está en una posición  $x' = 0$ , pues se haya sentado en el origen del sistema de referencia. De aquí podemos aplicar Lorentz brutalmente sobre el evento ( $t' = 1h$ ,  $x'=0$ ), y encontrar que

$$t = \gamma(t' + \frac{\beta}{c}x') \quad (1)$$

o sea,  $t = \gamma t'$ . Simple dilatación. Sin embargo, debemos considerar el tiempo que tarda la luz en llegar al ojo del observador. Y esto está directamente relacionado con la posición del astronauta. En el sistema terrestre, este tiempo adicional  $\tau$  viene dado por  $\tau = r/c$  donde  $r$  es la posición del astronauta al momento de medir la hora. Aplicando nuevamente las transformaciones, tenemos que el evento  $(t', 0)$  es en la tierra ( $t = \gamma t'$ ,  $r = u\gamma t'$ ) por lo que el tiempo total es

$$T = \gamma t' + \beta \gamma t' = t' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (2)$$

2. Una nave se aleja de la tierra a velocidad  $v = 0,8c$ . Cuando se encuentra a una distancia  $d = 6,66 \times 10^8 km$ , se le envía una señal de radio desde la tierra. ¿Cuánto tarda en llegar la señal, medido en ambos sistemas de referencia? ¿Cuál es la posición de la nave cuando recibe la señal, en ambos sistemas de referencia?

**Respuesta.** En el sistema de referencia de la tierra, es muy simple. Basta con igualar las ecuaciones “de movimiento” del cohete y del rayo de luz que sale de la tierra, o sea

$$c\Delta t = d + v\Delta t \quad (3)$$

por lo que

$$\Delta t = \frac{d}{c - v} \quad (4)$$

y por ende, la posición de la nave en este sistema es

$$c\Delta t = \frac{cd}{c - v} \quad (5)$$

que es la misma de la señal cuando se juntan. Ahora, en el sistema de referencia de la nave, podemos transformar simplemente los eventos anteriores con Lorentz. Para el tiempo, tenemos que el evento  $(\Delta t, c\Delta t)$  es

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{vc\Delta t}{c^2}) \quad (6)$$

y como la nave es el origen del sistema localizado en ella, su posición siempre es  $x' = 0$ . En números,  $\Delta t = 11,1 \times 10^3 s$  y  $\Delta t' = 3,7 \times 10^3 s$ .

3. Suponga un carrito con un espejo en la parte superior y una fuente en la inferior separados por una distancia  $d$ , que se mueve con velocidad  $\vec{u} = u\hat{x}$ . En el instante inicial, la fuente emite un destello que es reflejado en el espejo y vuelve a ella. Aplicando transformaciones de velocidades, calcule el tiempo que tarda en ir y volver en el sistema en reposo (fuera del carrito), suponiendo que el pulso de luz es una partícula que se mueve a la velocidad de la luz.

**Respuesta.** Podemos transformar la velocidad del rayo de luz, que en el sistema del carro es  $v' = c\hat{y}$  al sistema en reposo. Entonces, aplicando la transformación de velocidades queda

$$v_x = \frac{v'_x + u_x}{1 + v'_x u_x / c^2} = u \quad (7)$$

$$v_y = v'_y \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + v'_x u_x / c^2} = \frac{c}{\gamma} \quad (8)$$

Nótese que el módulo de la velocidad sigue siendo  $c$ . Como las distancias verticales no se contraen, el tiempo que tarda el rayo en reflejarse y volver es  $2\tau$ , donde

$$\tau = \frac{d}{v_y} = \frac{\gamma d}{c} \quad (9)$$

4. Dos naves se mueven con la misma velocidad en sentidos opuestos. Desde un sistema de referencia en reposo  $S$ , la nave  $A$  viaja con velocidad  $v_A = -c/2\hat{y}$  y  $B$  con  $v_B = c/2\hat{y}$ , y se hallan separadas en el eje  $x$  por una distancia  $d$ . En el instante en que tienen la misma posición en  $x$ , desde el sistema de referencia  $S$ , la nave  $A$  envía un paquete a la nave  $B$  con velocidad  $V = 3/4c$  (relativa a  $S$ ). ¿A qué ángulo, desde la nave  $A$  debe ser eyectado el paquete para ser recibido por  $B$ ? ¿En qué ángulo



Figura 1: Carrito problema 3.

es recibido por B?

**Respuesta** Si nos situamos en el sistema S, la componente  $y$  de la velocidad debe ser la misma que la de la nave que pretende alcanzar, o sea,  $c/2$ . Con esto, podemos calcular la componente  $x$  de la velocidad como

$$V_x = \sqrt{V^2 - V_y^2} = \sqrt{5}c/4 \quad (10)$$

Es claro que el ángulo de eyección en el sistema S es tal que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_y}{V_x} = 2\sqrt{5}/5 \quad (11)$$

Ahora, en el sistema  $S_A$ , simplemente transformamos cada componente de la velocidad, resultando

$$V'_x = \frac{\sqrt{15}}{10}c \quad (12)$$

y

$$V'_y = \frac{4}{5}c \quad (13)$$

por lo que

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{8}{15}\sqrt{15} \quad (14)$$

o mejor,

$$\alpha' = 64,2^\circ \quad (15)$$

Ahora, respecto al sistema  $S_B$ , transformamos simplemente, obteniendo

$$V_x'' = \frac{\sqrt{15}}{3}c \quad (16)$$

y

$$V_y'' = 0 \quad (17)$$

por lo que

$$\alpha'' = 0 \quad (18)$$

5. Un sistema en reposo emite dos pulsos luminosos en  $t = 0$  y  $t = \tau$ . Si  $S'$  es un sistema que se aleja de  $S$  con velocidad  $u$ , ¿cuál es el intervalo de tiempo entre la recepción de estos dos pulsos en  $S'$ ?

**Respuesta** En  $S$ , los tiempos de recepción son

$$t_1 = 0 \quad (19)$$

y

$$t_2 = \frac{u\tau}{c - u} \quad (20)$$

si es que hacemos trampa y suponemos que poseen el mismo origen de coordenadas. El tiempo  $t_2$  se calcula simplemente como la intersección de las trayectorias, eso es sabido. Y ahora transformamos. Cuando el segundo pulso llega a  $S'$ , la posición de este viene dada por  $x = ct_2$ . Así,

$$t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{u^2\tau}{c(c-u)}) = \tau\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (21)$$

lo que es prácticamente la fórmula del efecto Doppler.

6. Calcular las correcciones a primer y segundo orden en  $\frac{v}{c}$  para el corrimiento de la frecuencia de la emisión  $H_\beta$ , a partir de la neutralización de protones acelerados en un potencial de  $20kV$ . O sea, los protones se mueven a una velocidad que depende del potencial y se enlazan con un electrón para generar un átomo de hidrógeno. En ese proceso es posible ver la frecuencia espectral  $H_\beta$ , de longitud de onda  $\lambda = 4861,33\text{\AA}$  que se modificará por la velocidad de las partículas. :) Dato:  $mc^2 = 936MeV$

**Respuesta** Si el potencial es de  $20\text{ kV}$ , entonces la energía del protón será de  $20\text{ KeV}$ . Supondremos por ahora que la energía es lo suficientemente pequeña como para obtener la velocidad desde aquí como la energía cinética. Entonces,

$$K\frac{1}{2}mv^2 \quad (22)$$

y por ende,

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2K}{mc^2}} = 0,00654 \quad (23)$$

De aquí, podemos expandir en serie la longitud de onda a partir de la expresión del efecto Doppler como

$$\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 1 + \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots \quad (24)$$

de donde se puede obtener la corrección a primer orden como

$$\Delta\lambda_1 = \lambda\beta = 31,8\text{\AA} \quad (25)$$

y

$$\Delta\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda\beta^2 = 0,1\text{\AA} \quad (26)$$

7. Un floridano es cruza con rojo impunemente. Más tarde, alega inocencia diciendo que vio la luz roja ( $\lambda = 650nm$ ) como verde ( $\lambda = 550$ ) debido a los efectos relativistas de su velocidad. ¿Es posible esto? ¿A qué velocidad iba al momento de cruzar?

**Respuesta** Al ir acercándose a la fuente de luz, es claro qe el observador verá una frecuencia mayor que la frecuencia “en reposo”. Por lo tanto, como la frecuencia del verde es mayor que la del rojo, su argumento es plausible en principio. Ahora, aplicando Doppler a lo bruto, resulta

$$\lambda_{verde} = \lambda_{rojo} \sqrt{1 + \beta} \quad (27)$$

y de aquí podemos concluir que

$$\beta = \frac{v_r^2 - v_v^2}{v_r^2 + v_v^2} = 0,17 \quad (28)$$

por lo que su velocidad es  $v = 0,17c = 5 \times 10^7 m/s$

8. Dos estrellas A y B se ubican las direcciones  $y$  y  $x$  respectivamente. Calcular la velocidad de B en el sistema A si es que la longitud de A se mueve un 1 % hacia el rojo y la de B, 4 % hacia el azul.

**Respuesta** Podemos concluir rápidamente que a estrella A se está alejando de la tierra y que B se está acercando. Con esto, podemos aplicar Doppler para calcular sus velocidades. Para A,

$$\frac{\lambda'/\lambda}{=} 101/100 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (29)$$

De aquí,

$$\beta_A = \frac{\lambda'^2 - \lambda^2}{\lambda'^2 + \lambda^2} = 0,0099 \quad (30)$$

y para B,

$$\frac{\lambda'/\lambda}{=} 96/100 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (31)$$

por lo que

$$\beta_B = \frac{\lambda^2 - \lambda'^2}{\lambda'^2 + \lambda^2} = -0,0408 \quad (32)$$

Listo! El signo se pone a dedo porque se está acercando. Ahora transformamos la velocidad de B respecto a la de A. Resulta,

$$v'_{Bx} = v_{Bx} \sqrt{1 - v_{Ay}^2/c^2} = -0,0405 \times 0,9999 \times 3 \times 10^8 = 0,1215 \times 10^8 m/s \quad (33)$$

y

$$v'_{By} = -v_{Ay} = 0,0297 \times 10^8 m/s \quad (34)$$