FI22A-Sección 3 **Guía # 3** Sebastián Pérez

Otoño 2005

Radiación de Cuerpo Negro

En palabras simples, un cuerpo negro es una superficie que emite radiación electromagnética y está en equilibrio termodinámico. Esto significa que el cuerpo negro es un emisor ideal, es decir, es un objeto que absorbe toda la radiación incidente sobre él y luego la emite, sin pérdidas.

Un cuerpo negro se puede aproximar por una cavidad con una pequeña abertura. La energía radiante incidente a través de la abertura, es absorbida por las paredes en múltiples reflexiones y sólo una pequeña parte de ésta vuelve a escapar por la abertura. Podemos decir entonces que toda la energía incidente es absorbida.

Catástrofe Ultravioleta

Hace muchos años, antes de la revolución de la mecánica cúantica, se pensaba que la energía y la materia era un continuo indivisible, bajo ese contexto se desarrolló la teoría de **Rayleight** − **Jeans** que da cuenta de la dependencia de la densidad de energía de la radiación, con la frecuencia de ésta, era de la forma:

$$B(\nu) = \frac{8\pi\,\nu^2}{c^3}\,\langle\epsilon\rangle \tag{1}$$

donde ν es la frecuencia de la onda electromagnética que transporta la energía y $\langle\epsilon\rangle$ es la energía promedio. Un cálculo "clásico" de la energía promedio corresponde a considerar que es un continuo.

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{\int_0^\infty e^{-\epsilon/kT}\epsilon d\epsilon}{\int_0^\infty e^{-\epsilon/kT} d\epsilon} = kT\,\frac{\int_0^\infty e^{-x} x dx}{\int_0^\infty e^{-x} dx} = kT \tag{2}$$

luego,

$$B(\nu) = \frac{8\pi\,\nu^2}{c^3}\,kT \tag{3}$$

Notemos que a medida que aumenta la frequencia de la radiación la cantidad de energía aumenta, incluso:

$$\int_0^\infty B(\nu)d\nu = \frac{8\pi\,kT}{c^3}\int_0^\infty \nu^2 d\nu \quad \to \quad \infty \tag{4}$$

es decir, si integramos sobre todo el espectro electromagnético (para toda frecuencia) obtendremos una cantidad infinita de energía, inclusive basta con tomar el caso de las ondas mas energéticas, como es el caso de la luz ultravioleta. Esto fue llamado **"Catástrofe Ultravioleta"**.

Postulado de Planck

La solución a esta especie de paradoja llegó a manos de Max Planck, que en ~ 1900 planteó que la energía no era continua sino que estaba cuantizada en unidades de energía permitidas que llamó ”cuantos”. Así surgió la Teoría de los Cuantos que posteriormente evolucionaría hasta la Mecánica Cuántica. Esta hipótesis estaba avalada por famosos experimentos que no encontraban explicación en el formalismo clásico de Newton.

$$E_n = n\,h\,\nu = n\,\hbar\,\omega \tag{5}$$

Los niveles de energía $n = 0, 1, \ldots$ están cuantizados.

Si calculamos nuevamente la energía promedio, pero esta vez considerando la energía cuantizada obtenemos:

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{\sum_0^\infty e^{-nh\nu/kT} nh\nu}{\sum_0^\infty e^{-nh\nu/kT}} = nh\nu\,\frac{\sum_0^\infty nq^n}{\sum_0^\infty q^n} = nh\nu\frac{q\frac{\partial}{\partial q}\sum_0^\infty q^n}{\sum_0^\infty q^n} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \quad \langle\epsilon\rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{7}$$

Así llegamos a la distribución espectral de Planck:

$$B(\nu, T) = \frac{8\pi\,h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{8}$$

Ley de Wien

Esta ley dice que el máximo de la distribución espectral de Planck ocurre a una frecuencia proporcional a la temperatura del cuerpo.

$$\nu_{max} = b\,T = 5{,}88 \times 10^{10}\,[\text{Hz k}^{-1}]\,T$$

Otra forma de la Ley de Wien es con la longitud de Onda:

$$\lambda_{max}\,T = 0{,}29\,[\text{cm k}]$$

Ley de Stefan–Boltzmann

El flujo total de energía, por unidad de área y unidad de tiempo, emitida por el cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura.

$$F = \sigma\,T^4 = \frac{L}{4\pi r^2}$$

donde L es la luminosidad del cuerpo, y tiene unidades de energía por unidad de tiempo.

Ejemplos:

$\boxed{\text{Radiación de fondo}}$

El Big Bang se manifiesta hoy en día como un cuerpo negro a $T = 2{,}7\,k$. La longitud de onda del máximo de esta radiación es:

$$\lambda_{max} = \frac{0{,}29\,[\mathrm{cm}]}{2{,}7} = 0{,}107[\mathrm{cm}]$$

cae en la región de las ondas de microondas en el espectro electromagnético.

$\boxed{\text{La Constante Solar}}$

Podemos medir la luminosidad del Sol, la cual es aproximadamente $3{,}8\dot{1}0^{33}[\mathrm{erg\ s^{-1}}]$, entonces el flujo total que recibimos en la tierra proveniente del Sol, es:

$$F = 1{,}35 \times 10^6[\mathrm{erg\ s^{-1}cm^{-2}}] = 1{,}35 \times 10^3[\mathrm{watt\ s^{-1}m^{-2}}]$$

¿A qué distancia de una ampolleta el flujo radiante de ésta es igual a la constante solar?

$$F_{sol} = 1{,}35 \times 10^3[\mathrm{watt\ m^{-2}}] = \frac{100[\mathrm{watt}]}{4\pi r^2[m^2]} \tag{9}$$

$$r = 0{,}076[m] \tag{10}$$