FI22A-Sección 1 — **Guía #1** — Prof: Simón Casassus

Verano 2004 — Ayudante: Sebastián Pérez

"La verdadera lógica de este mundo está en el cálculo de probabilidades."
James Clerk Maxwell

Introducción a las Probabilidades

Es necesario revisar las nociones básicas de probabilidad ya que son de vital importancia para describir y estudiar sistemas macroscópicos compuestos de muchas partículas.

Es bien sabido que el problema de 2 cuerpos (ó partículas) interactuando entre sí es fácil de resolver y se pueden determinar con gran certeza la posición, velocidad y trayectoria de esta, lo cual se vuelve casi imposible de realizar cuando se habla de 3 o mas partículas, y mas aun en nuestro caso donde estudiaremos sistemas compuestos de mas de 10^{23} partículas. Por esto necesitamos un enfoque probabilístico para describir estos sistemas.

Y mas aun si tomamos en cuenta las limitaciones cuánticas impuestas por el *Principio de Incertidumbre* enunciado por Heisenberg hacia los años 20, el cual nos da cuenta de la imposibilidad de conocer simultaneamente la posición y el momentum de una partícula.

$$\Delta x \Delta p \geq h$$

Definición:

La probabilidad de que ocurra un suceso A esta dada por:

$$P(A) = \frac{\#\text{ casos favorables}}{\#\text{ casos totales}} \tag{1}$$

Entonces la "probabilidad" de un resultado particular la entendemos como una estimación de la fracción mas probable de un número de observaciones repetidas que daran ese resultado particular.

Además debe cumplir $0 \leq P(A) \leq 1$.

Existen 2 tipos de variables probabilísticas, las cuales deben cumplir con la condición de normalización (la suma de las probabilidades extendida a todos los valores posibles de la variable debe ser igual a la unidad):

–Aleatorias Discretas: sus posibles valores son un conjunto numerable de puntos (n).

$$\sum_{i=0}^{N} P(x_i) = 1$$

–Aleatorias Continuas: sus posibles valores son un conjunto no numerable de valores.[1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1$$

[1] El intervalo de integración no es necesariamente $(-\infty, \infty)$, es mas bien sobre todo el dominio de la variable aleatoria x.

Propiedades: Sean A y B dos eventos, estadísticamente independientes, debe cumplirse que:

$$\begin{aligned} P(A \vee B) &= P(A) + P(B) && (2)\\ P(A \wedge B) &= P(A)P(B) && (3)\\ P(A \setminus B) &= \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = P(A) && (4) \end{aligned}$$

La segunda igualdad en la última expresión se tiene si y solo si los eventos son *estadísticamente independientes.*

Dos sucesos o eventos son estadísticamente independientes si la presencia de uno de ellos no depende de la presencia o ausencia del otro.

Distribución Binomial

Nos es de gran interes estudiar un sistema donde se tienen N sucesos estadísticamente independientes cada uno con solo 2 opciones, ocurrencia o no ocurrencia, con probabilidades **p** y **q** respectivamente, como es el caso de muchos problemas físicos importantes, como por ejemplo :

— *Sistemas de N spines $1/2$, con un momento magnético asociado μ_0.*
— *Lanzamientos de monedas o dados.*
— *Gas ideal de N moléculas en un volumen dividido en 2 secciones V y V'.*
— *Random Walk.*

La deducción de una expresión que nos entregue la probabilidad deseada se obtiene de manera simple, partamos de la condición de normalizacion, que tiene por consecuencia evidente

$$p + q = 1 \tag{5}$$

además si tenemos N sucesos podemos decir que n de estos sucesos están asociados a la probabilidad de ocurrencia p y n' asociados a q, es decir

$$n + n' = N \tag{6}$$

entonces, ¿cuál es la probabilidad $P(n)$ de que n de los sucesos N se cumplan?, esto se resuelve mediante el siguiente razonamiento. La probabilidad de n es p y la probabilidad de n' es $q = 1 - p$, como los N sucesos son estadísticamente independientes, la generalización de la relación (3) nos dice que

$$P(n)\ \alpha\ pp...p\, qq...q = p^n q^{n'} = p^n q^{N-n} \tag{7}$$

La relación es de proporcionalidad solamente ya que la situación que estamos describiendo, donde se cumplen n de los N sucesos y n' de estos no se cumplen, se puede obtener de muchos modos diferentes, es decir, hay una dependencia de la configuración u ordenemiento de los N sucesos.

El número de configuraciones posibles se expresa mediante la *combinatoria*

$$C_N(n) = \binom{N}{n} \stackrel{def}{=} \frac{N!}{n!(N-n)!} \tag{8}$$

La probabilidad buscada resulta entonces

$$P(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \tag{9}$$

En resumen, hemos obtenido una expresión para describir el siguiente caso general: si tenemos N eventos estadísticamente independientes, cada uno de ellos con probabilidad p de cumplirse o probabilidad $q = 1 - p$ de que no se presente, la probabilidad $P(n)$ de que se verifiquen n cualquiera de estos N eventos (mientras no se presenten los $n' = N - n$ eventos restantes) corresponde a la **distribución binómica** (9).

Cálculo de valores medios de variables discretas

Esperanza de una variable aleatoria (promedio)

$$\overline{x} \equiv < x > = \sum_{i=1}^{N} P(x_i) x_i \tag{10}$$

Dispersión, desviación de x con respecto a su valor medio $\overline{x}$

$$\overline{(\Delta x)^2} \equiv \overline{(x - \overline{x})^2} = \sum_{i=1}^{N} P(x_i)(x_i - \overline{x})^2 \geqslant 0 \tag{11}$$

tiene dimensiones del cuadrado de la variable.

Desviación standard, medida lineal de la repartición de los valores posibles de x (raíz cuadrada de la dispersión)

$$\sigma = \sqrt{\overline{(\Delta x)^2}} = \sqrt{\overline{(x - \overline{x})^2}} \tag{12}$$

la mayoría de los valores de x deben presentarse dentro de un intervalo del orden de σ alrededor de $\overline{x}$.

Distribución continua de probabilidad

Cuando la variable aleatoria es *continua* se habla de una "densidad de probabilidad" $p(x)$, de las cuales la mas común es la llamada *distribución gaussiana o normal*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty \tag{13}$$

donde,

μ valor promedio de x (esperanza).

σ^2 Dispersión (nos da el ancho de la campana).

σ Desviación Standard.

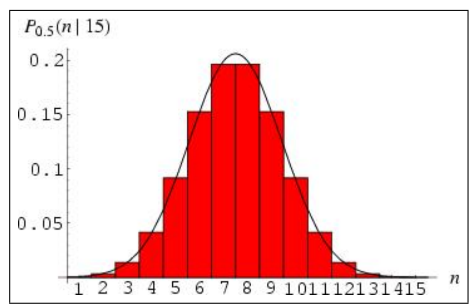


Figura 1: Distribución binomial(discreta) y distribución normal (continua).

Para centrar la función en el valor esperado (μ) se utiliza el cambio de variable $z = |x - \mu|/\sigma$.

La probabilidad de que ocurra un suceso x entre a y b viene dada por

$$P_{ab} = \int_a^b p(x)dx \tag{14}$$

que corresponde al area bajo la curva de densidad de probabilidad comprendida entre los valores a y b.

I Random Walk problem [Problema del camino aleatorio (~2.5 Reif)]

Un hombre parte desde una farola en la mitad de una calle con pasos de igual longitud l. La probabilidad de que uno de sus pasos sea hacia la derecha es p, y $q = 1 - p$ de que sea hacia la izquierda. El hombre está tan borracho que su comportamiento en cada paso indica que no existen trazas en su memoria de lo que hizo en los pasos anteriores. Sus pasos son, pues, estadísticamente independientes. Suponer que el hombre ha dado N pasos.

1. ¿Cuál es la probabilidad $P(n)$ de que n de dichos pasos sean hacia la derecha y los restantes $n' = N - n$ hacia la izquierda?
2. Calcule el valor medio, la disperción y la desviación standard para el caso del Random Walk *(los resultados son generales para cualquier problema binomial)*
3. ¿Cuál es la probabilidad de que el desplazamiento del hombre desde la farola sea ml, en donde $m = n - n'$ es un número entero?

Solución:

1. La probabilidad buscada corresponde a la ecuación (9), que podemos escribir de la forma

$$P(n) = \frac{N!}{n!\,n'!}\,p^n q^{n'} \tag{15}$$

2. Cálculo de $\overline{n}$

$$\overline{n} = \sum_{i=0}^{N} P(n)n = \sum_{i=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!}\,p^n q^{N-n}\,n$$

Para calcular esta sumatoria hay que utilizar un truco: $np^n = p\frac{\partial}{\partial p}(p^n)$

$$\begin{aligned}
\overline{n} &= \sum_{i=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!}\,p\frac{\partial}{\partial p}(p^n)q^{N-n} \\
&= p\frac{\partial}{\partial p}\left[\sum_{i=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!}\,p^n q^{N-n}\right] \\
&= p\frac{\partial}{\partial p}[p+q]^N \\
&= pN[p+q]^{N-1} \\
&= pN
\end{aligned}$$

Cálculo de $\overline{n'}$, Sabemos que

$$\begin{aligned}
n' = N - n \Rightarrow \overline{n'} &= \overline{N} - \overline{n} \\
&= N - \overline{n} \\
&= N - Np \\
&= N(1-p) \\
&= Nq
\end{aligned}$$

Cálculo de $\overline{m}$, $(m = n - n')$

$$\begin{aligned}
\overline{m} &= \overline{n} - \overline{n'} \\
&= Np - Nq \\
&= N(p-q)
\end{aligned}$$

Cálculo de la dispersión

$$
\begin{aligned}
\overline{(\Delta n)^2} &= \overline{(n-\overline{n})^2} \\
&= \overline{n^2} - 2\overline{n}\,\overline{n} + \overline{n}^2 \\
&= \overline{n^2} - \overline{n}^2 \qquad \textit{solo nos falta calcular } \overline{n^2}
\end{aligned}
$$

$$
\overline{n^2} = \sum_{i=0}^{N} P(n) n^2 = \sum_{i=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} \, p^n q^{N-n} \, n^2
$$

Tendremos que utilizar otro truco $n^2 p^n = (p\frac{\partial}{\partial p})^2 (p^n)$

$$
\begin{aligned}
\overline{n^2} &= \sum_{i=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} \, (p\frac{\partial}{\partial p})^2 (p^n) q^{N-n} \\
&= (p\frac{\partial}{\partial p})^2 \left[\sum_{i=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} \, p^n q^{N-n} \right] \\
&= \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^2 [p+q]^N \\
&= \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right) pN[p+q]^{N-1} \\
&= p[N(p+q)^{N-1} + p(N-1)N(p+q)^{N-2}] \\
&= pN[1 - Np - p] \\
&= p^2 N^2 + Npq
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{(\Delta n)^2} &= (Np)^2 + Npq - (Np)^2 \\
&= Npq
\end{aligned}
$$

Cálculo de la desviación standard

$$
\sigma = \sqrt{\overline{(\Delta n)^2}} = \sqrt{Npq} \tag{16}
$$

3. Nos piden calcular $P'(m)$, la probabiliad de que despues de dar N pasos el borracho se encuentre a una distancia ml del origen.

   Vamos a calcular el caso especial cuando $p = q = 1/2$ (está muy borracho) tiene la misma probabilidad de ir hacia la izquierda que a la derecha. Primero veamos la relación entre m y n

$$
m = n - n' = n - N + n = 2n - N \quad \Rightarrow \quad n = \frac{m+N}{2}
$$

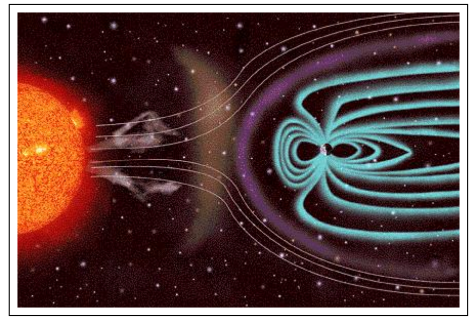
   la idea es pues expresar la nueva variable aleatoria en función de una variable de la cual si conocemos su distribución de probabilidad (n)

$$
\begin{aligned}
P'(m) &= P(n = \frac{m+N}{2}) \\
&= \frac{N!}{\left(\frac{N-m}{2}\right)!\left(\frac{N+m}{2}\right)!} \frac{1}{2^N}
\end{aligned}
$$

   Además, se verifica que si N es impar, m es impar y si $p = q = 1/2$ obviamente $P'(m) = 0$. Si tiene la misma probabilidad de ir hacia la izquierda que a la derecha, y da un número de pasos impares, lo mas probable es que se mantenga en el origen.

II Distribución de Poisson y consecuencias experimentales [P1 Control 1 Primavera 2004]

Un experimentador basado en Antartida estudia el flujo de rayos cósmicos que transporta el viento Solar. Usa un detector de área unitaria capaz de medir la presencia de un impacto de protones $N >> 1$ veces por segundo, y obtiene que el número de resultados positivos es $n << N$. El experimentador se pregunta acerca de la precisión de sus mediciones de flujo.



Queremos entonces aproximar la distribución binomial, correspondiente a la probabilidad de ocurrencia de n eventos con probabilidad p en N experimentos,

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \quad \text{en que } q = 1 - p \tag{17}$$

al caso de la distribución de Poisson, $N >> 1$, $p << 1$, $n << N$:

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad \text{donde } \lambda = Np \tag{18}$$

1. Muestre que $(1-p)^{N-n} \sim e^{-Np}$.

   Sol.

$$\begin{aligned} (1-p)^{N-n} &= \exp{(N-n)\ln(1-p)} && \text{Hacemos un Taylor de primer orden } \ln(1-p) \sim -p \\ &\sim \exp{(N-n)(-p)} && \text{pero } N-n \sim N \text{ ya que } N >> n \\ &\sim \exp{-Np} \end{aligned}$$

2. Luego, como $n << N$, muestre que $\frac{N!}{(N-n)!} \sim N^n$, y concluya con la distribución de Poisson.

   Sol.

$$\begin{aligned} \frac{N!}{(N-n)!} &= \underbrace{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}_{\text{n términos}} && \text{como } N >> n \text{ cada término es } \sim N \\ &\sim N^n \end{aligned}$$

   Ahora reemplazamos en la distribución binómica las aproximaciones obtenidas en 1. y 2.

$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{N^n P^n}{n!} e^{-Np} && \lambda = Np \\ &= \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} && \text{[Distribución de Poisson]} \end{aligned}$$

3. Cuál es el valor medio de n, $\langle n \rangle$?

   Sol.

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \textstyle\sum_{n=1}^{N} P(n)\, n &&= \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\, n \\ &= e^{-\lambda} \textstyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} &&= e^{-\lambda} \lambda \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} && \textit{como } N >> 1, \textit{ entonces } \sum_{k=0}^{N\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \to e^{\lambda} \\ &= e^{-\lambda}\,\lambda\, e^{\lambda} &&= \lambda \end{aligned}$$

4. Demuestre que la desviación standard de la distribución es $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

   Sol.

$$\sigma = [\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2]^{1/2} \tag{19}$$

   como ya obtuvimos $\langle n \rangle$ solo nos falta encontrar el promedio del cuadrado

$$\begin{aligned}
\langle n^2 \rangle &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda}\, n^2 &&= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, e^{-\lambda}\, n \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\, e^{-\lambda}\, (n-1+1) &&= e^{-\lambda}\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\right] \\
&= e^{-\lambda}\big[\lambda^2\, e^{\lambda} + \lambda\, e^{\lambda}\big] &&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

   finalmente,

$$\begin{aligned}
\sigma &= [\lambda^2 + \lambda - \lambda^2]^{1/2} \\
\sigma &= \sqrt{\lambda}
\end{aligned}$$

5. El experimentador reporta un flujo de $4 \cdot 10^8$ protones $s^{-1}cm^{-2}$. Recomiende un valor para caractarizar la precisión de su observación. Explique.

   Sol.

   Una buena estimación de la precisión de los datos obtenidos es la *desviación standard*, la cual es una medida lineal de la repartición de los valores posibles.
   El intervalo de precisión está dado por:

$$[\langle n \rangle - \sigma, \langle n \rangle + \sigma] \;\rightarrow\; [\lambda - \sqrt{\lambda}, \lambda + \sqrt{\lambda}] \tag{20}$$

6. Decepcionado con la precisión de su medición, el experimentador decide repetir el experimento 16 veces, en días distintos. Se pregunta ahora acerca de la mejora en la precisión que obtendra al promediar el flujo de protones cada día.

   Sol.

   Para tener una noción de la mejora que obtendría al repetir N veces el experimento, basta con comparar si la razón entre el "valor esperado" y la desviación standard aumenta o decrece

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\langle (\Delta n)^2 \rangle}}{\langle n \rangle} &= \frac{\sigma}{\lambda} \\
&= \frac{\sqrt{Np}}{Np}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; \frac{\sigma}{\lambda} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{21}$$

Este resultado es muy general, muestra que mientras la desviación standard (que mide la anchura de la distribución de valores de n alrededor de su valor medio $\langle n \rangle$) aumenta cuando N crece, pero solo proporcionalmente a $N^{1/2}$, la magnitud relativa de σ comparada con $\langle n \rangle$ ***decrece*** proporcionalmente a $N^{-1/2}$. Luego, esta razón es muy pequeña cuando N es grande.