

Definición:

La probabilidad de que ocurra un suceso A está dada por:

$$P(A) = \frac{\# \text{ casos favorables}}{\# \text{ casos totales}} \quad (1)$$

Entonces la "probabilidad" de un resultado particular la entendemos como una estimación de la fracción más probable de un número de observaciones repetidas que darán ese resultado particular.

Además debe cumplir $0 \leq P(A) \leq 1$.

Relaciones Útiles: si $N \gg 1$, entonces $\ln N! \sim N \ln N - N$ y si $x \ll 1$, entonces $\ln(1+x) \sim x + \dots$

I Defectos de un sólido (Intersticios).

Un sólido ideal se puede describir por N átomos colocados ordenadamente. En ciertos materiales se observan defectos en los que algunos átomos abandonan las posiciones de la red para ocupar intersticios. Suponga que un sistema de N átomos (N es un número enorme) contiene m defectos de este tipo ($m \ll N$, pero también es un número enorme). Existe un intersticio por cada átomo y los intersticios son equivalentes entre ellos.

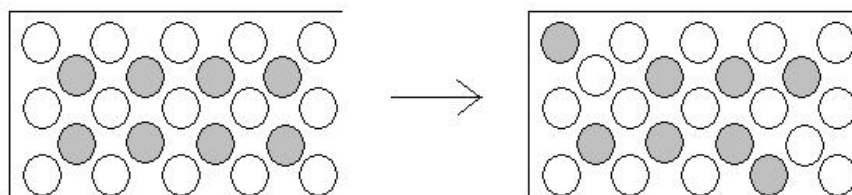


Figura 1: Intersticios

- Calcule el número de configuraciones accesibles ω (multiplicidad) en función de N y m .
- Calcule la entropía del sistema en el límite $N \gg m \gg 1$ despreciando términos en m^2 .

II Paramagnetismo.

Un sólido, compuesto por N átomos de espín $1/2$, está colocado en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$. El efecto del campo magnético es agregar a la energía interna del sólido $U = -\vec{M} \cdot \vec{B}$, en que $\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{\mu}_i$ es la suma de los momentos magnéticos de cada átomo. Para un átomo con espín $1/2$, $\vec{\mu}$ es paralelo o antiparalelo a \vec{B} , i.e. $\vec{\mu} = +\mu\hat{z}$ o $\vec{\mu} = -\mu\hat{z}$.

1. Si el sólido se mantiene a una temperatura T , y si la energía de un átomo es $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, escriba las probabilidades P_1 y P_2 asociadas con los dos estados energéticos de un átomo (use la estadística de Boltzmann, $P \propto e^{-\beta E}$).
2. Muestre que el momento magnético medio de un átomo es $\langle \mu \rangle = \mu \tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$, y escribir $\langle \vec{M} \rangle$.
3. Explique por qué si $kT \gg \mu B$, $M \sim 0$, y el sólido es insensible a un campo magnético (si $M \neq 0$, el sólido se mueve hacia regiones de campo más intenso para minimizar su energía U).
4. Si n_1 y n_2 espines apuntan hacia arriba y hacia abajo, $U = -(n_1 - n_2)\mu B$, y $N = n_1 + n_2$. Calcule $\omega = N!/(n_1!n_2!)$, el número de estados accesibles al sistema, en función de N , U , μ y B .

III Modelo de banda elástica (Polímeros).

Una banda elástica se dilata al *enfriarse*. Cualitativamente, esto se debe a que se enrollan los largos polímeros que componen la banda al aumentar su agitación térmica. Se encoje la banda porque se doblan los polímeros al chocar entre ellos. Queremos estudiar este fenómeno modelando los largos polímeros por una sola cadena de segmentos. Consideramos una cadena de largo total L , orientada paralelamente a un eje de coordenadas x , compuesta por N segmentos, cada uno de los cuales tiene largo a . Hay n_1 segmentos en dirección $+\hat{x}$, y n_2 en dirección $-\hat{x}$, de manera que $L = an_1 - an_2$ y $N = n_1 + n_2$.

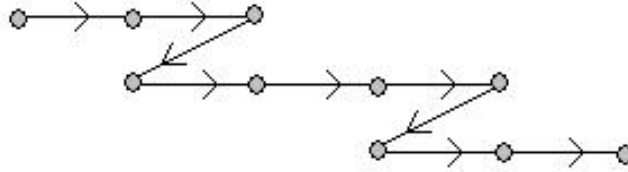


Figura 2: Modelo de la Banda Elástica

1. Un estado de la cadena con largo L y número de segmentos N está caracterizado por (n_1, n_2) . Explicar por qué hay $N!/(n_1!n_2!)$ estados posibles para L y N dados.
2. Si los segmentos no tienen orientación privilegiada, calcular la entropía de la cadena $S = k \ln \omega$, en que ω es el número de estados accesibles a la cadena. Expresar S en función de a , N , y L , si $N \gg 1$.
3. Un extremo de la cadena está amarrado a una pared, y sometemos la cadena a una tensión R tirandola del otro extremo. La cadena se mantiene a temperatura constante T , poniendola en contacto con un reservorio de temperatura (la pared, por ejemplo). Hacemos la analogía entre la cadena y un gas identificando el largo L con volumen, y la tensión R con presión (por -1). Escribir dE , y dF , en que $F = E - TS$ es la energía libre de la cadena. Relacionar la tensión R con derivadas parciales de F .
4. La energía de la cadena no depende de L , porque no hay diferencia de energía entre las dos orientaciones posibles de cada segmento (son igualmente probables), de manera que $\partial E / \partial L|_T = 0$. Calcular R en función de a , N , L , y T .
5. Muestre que recuperamos cuantitativamente el fenómeno de contracción de la cuerda a mayor T . Aproxime $L \ll Na$, y recupere la ley de Hooke.