Guía Control 3: Pequeñas Oscilaciones[1]

FI21B - Sistemas Dinámicos

Carlos A. Suazo Martínez

Jueves 19 de Mayo de 2005

[1]Esta guía comprende ejercicios de Pequeñas Oscilaciones del curso FI21B. Cualquier tipo de consulta o error enviar a: casuazo@ing.uchile.cl

1. Introducción

Sea $V(q) = V(q_1, \ldots, q_n)$ un potencial definido en sus coordenadas generalizadas q_i. Se definió anteriormente las posiciones de equilibrio de un sistema y un criterio de estabilidad, obteniéndose:
- Posición de Equilibrio:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

- Estabilidad:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} > 0$$

Lo anterior debe cumplise $\forall k, j$. Ahora si se desea realizar un análisis para pequeñas perturbaciones entorno a un mínimo (condición de equilibrio estable), entonces se define $\vec{q} = \vec{x} - \vec{x_0}$ y se escribe el Lagrangeano del sistema de la manera que sigue:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^{\,t}\tilde{T}\dot{\vec{q}} - \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^{\,t}\tilde{V}\vec{q}$$

con $\tilde{T}$ y $\tilde{V}$ matrices simétricas y definidas positivas. Para resolver un problema "tipo"de pequeñas oscilaciones, deben de seguirse los siguientes pasos:

1. Buscar los distintos puntos de equilibrio del sistema.
2. Realizar un Taylor de orden 2 al Lagrangeano, en el punto de equilibrio obtenido anteriormente.
3. Encontrar las matrices $\tilde{T}$ y $\tilde{V}$.
4. Escribir: $-w^2\tilde{T} + \tilde{V}$.
5. Resolver el sistema: $det(-w^2\tilde{T} + \tilde{V}) = 0$, de donde se obtendran las frecuencias propias del sistema w_α.
6. Resolver: $(-w^2\tilde{T} + \tilde{V})\vec{A_\alpha} = 0$ donde los vectores propios obtenidos $\vec{A_\alpha}$ serán llamados Modos Normales.
7. Reescribir los modos normales de la forma: $\vec{A_\alpha} = \vec{A_{\alpha'}}e^{i\phi_\alpha}$

Finalmente con los datos obtenidos anteriormente, se concluye que la solución para cada coordenada normal es:

$$\vec{q} = \sum_\alpha c_\alpha \vec{A_{\alpha'}} cos(w_\alpha t + \phi_\alpha)$$

donde c_α y ϕ_α se determinan mediante las condiciones iniciales. Otro punto importante a determinar de los distintos sistemas son sus coordenadas normales que a grandes rasgos son aquellas coordenadas generalizadas que tienen como ecuación característica la de un oscilador armónico. Para determinar éstas coordenadas, se debe escribir el vector:

$$a = [A_1 \vdots \ldots \vdots A_n]$$

y luego despejar de la ecuación:

$$\vec{q} = a \cdot \vec{\eta}$$

Donde los términos η_i se denominan coordenadas normales.
Por último puede ser de bastante utilidad saber para los cálculos que:

$$[q_1, q_2]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = aq_1^2 + (b+c)q_1q_2 + dq_2^2$$

Donde claramente de la parte anterior se puede apreciar que las matrices $\tilde{T}$ y $\tilde{V}$ son simétricas.
Nota: En el caso en que el punto de equilibrio sea distinto de 0, entonces es necesario recordar que la aproximación de Taylor de orden N queda:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{N} f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

En donde obviamente la aproximación de segundo orden es para N=2.

2. Problemas

Problema 1: Considere el péndulo doble de la figura

(a) Considere pequeñas oscilaciones y calcule la frecuencia de los modos normales

(b) Calcule los modos normales del sistema

(c) Analice el movimiento para los casos extremos $\frac{m_1}{m_2} \to 0$ y $\frac{m_1}{m_2} \to \infty$

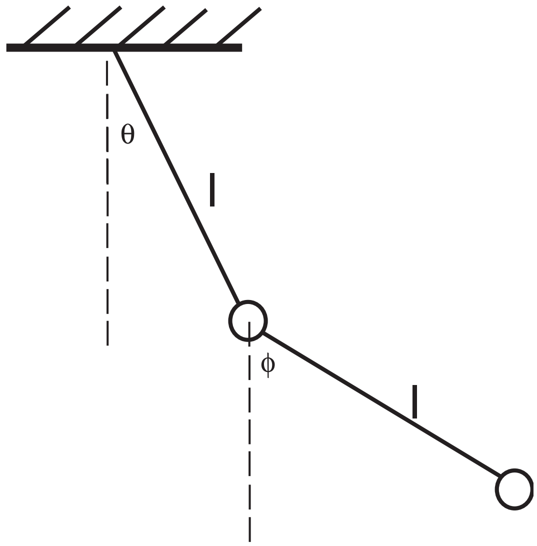

Figura 1: Caso péndulo doble

Problema 2: Considere el péndulo doble indicado en la figura donde el largo natural del resorte sin masa es l_o, que coincide con la separación de las masas en su posición de equilibrio. La constante elástica es K y la longitud de los hilos es l.

a.) Estudie las pequeñas oscilaciones en torno a los valores de equilibrio $\theta = 0$ y $\phi = 0$.

b.) Ahora considere un fila ininita de péndulos, donde cada péndulo está conectado con su vecino similarmente que en la parte a.). Encuentre los modos normales y las frecuencias correspondientes para este nuevo sistema.

Solución: Si se define: $w_1^2 = q/l$ y $w_2^2 = g/l + 2K/m$. Se obtiene:

$$\theta(t) = c_1 cos(w_1 t + \phi_1) + c_2 cos(w_2 t + \phi_2)$$

$$\phi(t) = c_1 cos(w_1 t + \phi_1) - c_2 cos(w_2 t + \phi_2)$$

Para el sistema infinito se tiene:

$$w = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{m}(1 - cos(\kappa l_0)}$$

donde $\kappa = \frac{2\pi}{p l_0}$ con $p = 1, 2, 3, \ldots$. Finalmente los modos normales (para $p = 1, 2, 3, 4, \ldots$) son:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} Ae^{-iwt}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} Ae^{-iwt}, \begin{pmatrix} e^{i\frac{2}{3}}\pi \\ e^{i\frac{4}{3}}\pi \\ 1 \\ e^{i\frac{2}{3}}\pi \\ e^{i\frac{4}{3}}\pi \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} Ae^{-iwt}, \ldots$$

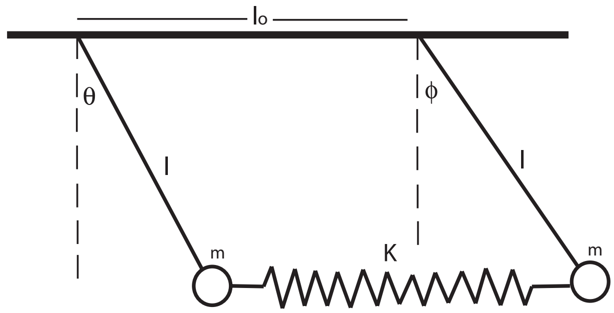

Figura 2: Esquema problema 2

Problema 3: Considere el sistema de la figura, donde hay una barra de largo $l/2$ y en uno de sus extremos una cuerda de largo l con una masa m. Se pide encontrar el Largrangeano aproximado (de orden 2) y las frecuencias propias del sistema. Considere el momento de inercia de la barra I_B conocido.
Solución: El lagrangeano de orden 2 queda:

$$L' = \frac{1}{2}(\frac{1}{24}ml^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2(\frac{\dot{\theta}^2}{16} + \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}\dot{\phi}) - mgl(\frac{1}{4}\frac{\theta^2}{2} + \frac{\phi^2}{2})$$

Y las frecuecias propias son: $w_+^2 = 4g/7l$ y $w_-^2 = -3g/l$

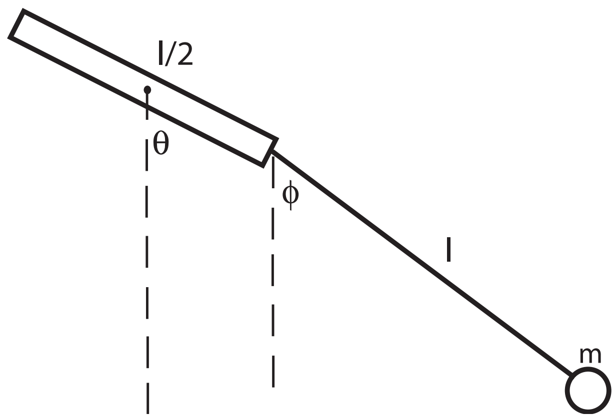

Figura 3: Esquema problema 3

Problema 4: El sistema de la Figura 4 considera un bloque de masa M que se mueve a través de un riel junto con un péndulo de masa m y largo l. Para éste sistema se pide determinar la frecuencia de pequeñas oscilaciones.
Solución: La frecuencia queda determinada como:

$$w^2 = \frac{(M+m)g + Kl \pm \sqrt{[(M+m)g + Kl]^2 - 4MlKg}}{2Ml}$$

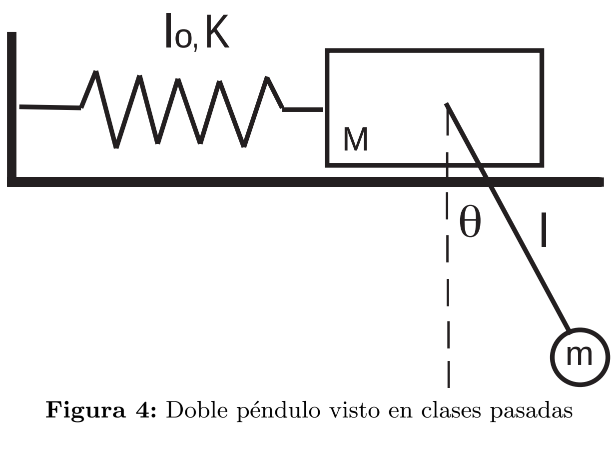

Figura 4: Doble péndulo visto en clases pasadas

Problema 5: (Ejercicio 3 - 2004 - Prof. Felipe Barra) Considere el sistema de la figura 5:

a.) Escriba el Lagrangeano para las pequeñas oscilaciones del sistema (i.e. el Largrangeano cuadrático en torno al punto de equilibrio). Muestre que en ésta aproximación el movimiento es solo lateral. Por simplicidad considere $mg/l = k/2$

b.) Determine las frecuencias y los modos propios. Escriba la solución general que determina el movimiento

c.) Escriba la solución para el caso particular en que ambas partículas parten de la posición de equilibrio con velocidad ϵ la de la izquierda y $\epsilon/2$ la de la derecha.

Solución: El Lagrangeano se realiza de la misma forma anterior obteniendo como frecuencias propias: $w_1^2 = 3K/m$ y $w_2^2 = K/m$. La solución general queda:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} cos(\sqrt{\frac{3K}{m}}t + \phi_1) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} cos(\sqrt{\frac{K}{m}}t + \phi_2)$$

Donde c_1, c_2, ϕ_1 y ϕ_2 son constante a determinar por condiciones iniciales. Propuesto

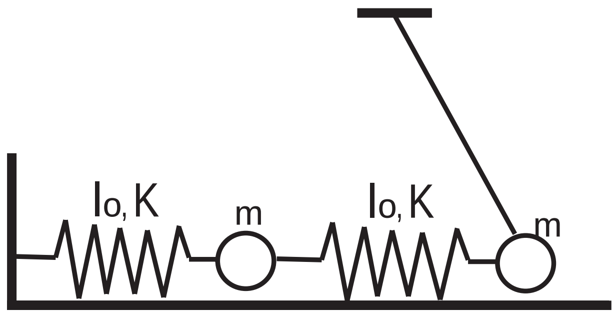

Figura 5: Esquema problema 5

Problema 6: (Ejercicio 3 - 2004 - Prof. Nicolás Mujica) Considere el sistema descrito por la figura, donde las masas m están unidas de dos resortes iguales de constante K y largo natural l_0, como también a dos cuerdas inextensibles de largo l. Los péndulos se encuentran acoplados a través de una barra de torsión de constante ϵ. Recuerde que este acoplamiento introduce un término de la forma $-\epsilon\theta_1\theta 2$ en la energía potencial. Considere que las constantes son tales que la posición de equilibrio del sistema corresponde a los resortes *horizontales* y que los péndulos se encuentran perfectamente verticales respecto a la dirección de la gravedad.

a.) Escriba el Lagrangeano del sistema para ángulos arbitrarios de oscilación θ_1 y θ_2.

b.) Escriba el Lagrangeano del sistema en el límite de pequeñas oscilaciones.

c.) Encuentre las frecuencias propias y los modos propios de oscilación.

Solución: Sólo se incluirán las frecuencias propias que resultan ser:

$$w_-^2 = \frac{mgl + Kl^2 - \epsilon}{ml^2}$$

$$w_+^2 = \frac{mgl + Kl^2 + \epsilon}{ml^2}$$

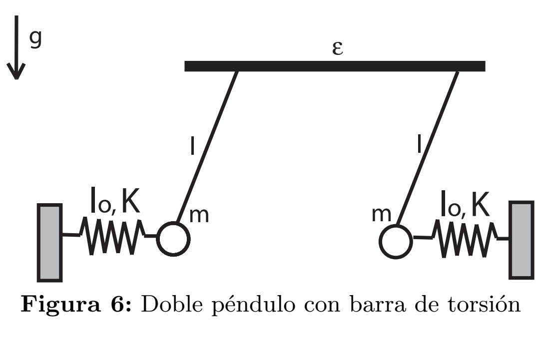

Figura 6: Doble péndulo con barra de torsión

Problema 7: Determine las frecuencias propias y los modos normales de pequeñas oscilaciones para los sistemas caracterizados por los siguientes Lagrangeanos:

a.) $L = \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2} - \frac{w_1^2x^2+w_2^2y^2}{2}$

b.) $L = \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2} - \frac{w_1^2x^2+w_2^2y^2}{2} + \alpha x$

c.) $L = \frac{m_1\dot{x}^2+m_2\dot{y}^2}{2} + \beta\dot{x}\dot{y} - \frac{x^2+y^2}{2}$

Problema 8: Considere una molécula triatómica de forma triangular con dos átomos iguales de masa m y uno distinto de masa M configurados como se muestra en la figura. Los átomos m están enlazados al átomo central de masa M con resortes de constante K y largo natural L. Determine las frecuencias de vibración de la molécula considerando que no hay fuerzas externas.

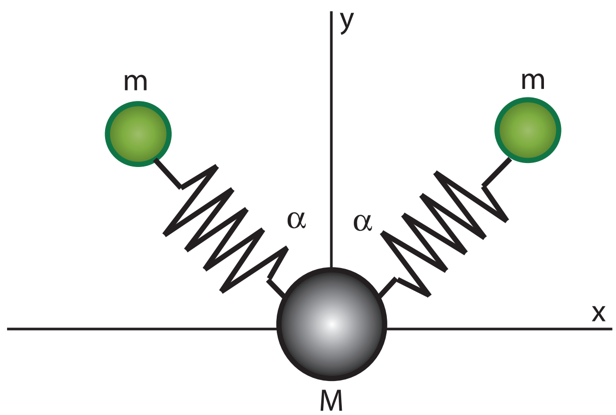

Figura 7: Molécula triatómica

Problema 9: Considere una cama como un sólido rígido rectangular plano de masa M sujetada en sus vértices por resortes de constante elástica K y largo natural l_0. Suponga que los resortes sólo se mueven verticalmente para pequeñas oscilaciones. Busque las coordenadas generalizadas para simplificar el problema y encuentre los modos normales de la cama y sus frecuencias propias asociadas.

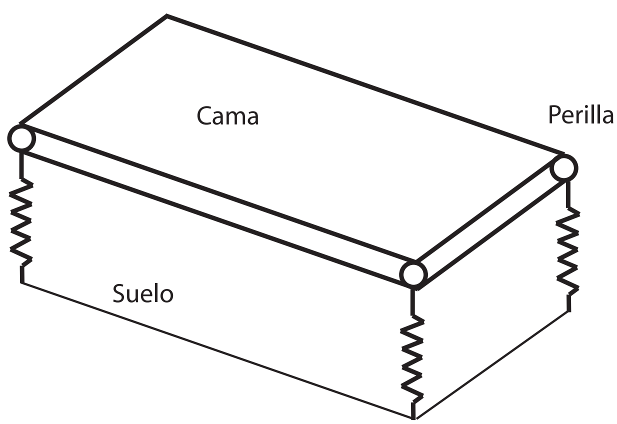

Figura 8: Esquema problema 9

Problema 10: (P1- C3 - 2004 - Prof. Nicolás Mujica) Considere un anillo de radio R sobre el que se mueven dos masas iguales unidas por dos resortes iguales como muestra la figura. Este anillo se encuentra fijo sobre un plano inclinado (no desliza) de ángulo α. Para pequeños valores del ángulo α la posición que se indica en la figura es de equilibrio estable ($l_0 = \pi R$).

a.) Calcule las frecuencias propias de oscilación.

b.) En el límite $\alpha \to 0$ una de las frecuencias se anula. Interprete físicamente este resultado.

c.) Considere ahora el caso $\alpha = 0$. Calcule los modos propios y las coordenadas normales. Escriba y dibuje la energía potencial en estas coordenadas. Explique cualitativamente como cambia esta figura al considerar $\alpha > 0$.

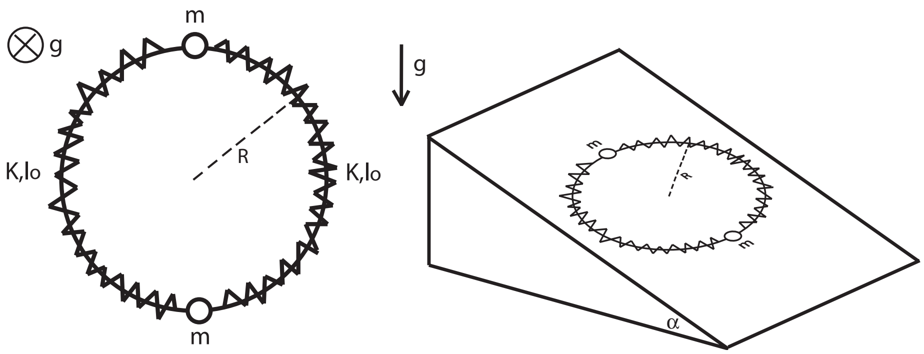

Figura 9: Esquema problema 10

Problema 11: (Wisconsin) Un sólido cilíndrico homogéneo de radio r y masa m rueda sin resbalar dentro de un cilindro mayor estacionario de radio R como se muestra en la figura 11.

a.) Si el cilindro pequeño comienza su movimiento desde el reposo con un ángulo θ_0 desde la vertical, ¿Cuál es la fuerza total que se ejerce hacia abajo sobre el cilindro exterior cuando el cilindro pequeño pasa por el punto más bajo?

b.) Calcule la ecuación de movimiento para el cilindro pequeño usando las ecuaciones de Lagrange.

c.) Encuentre las frecuencias propias de pequeñas oscilaciones entorno al equilibrio estable.

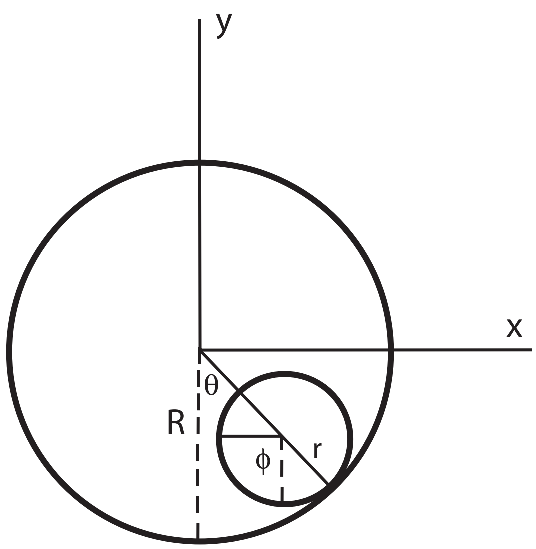

Figura 10: Cilindro dentro de otro cilindro

Problema 12: (UC, Berkeley) Un bloque de masa m esta sujeto a una cuña de masa M por un resorte de constante elástica K. La superficie sin roce inclinada de la cuña forma un ángulo α con la horizontal y la cuña es libre de deslizar sobre una superficie horizontal sin roce como se muestra en la figura 11.

a.) Dado el largo natural del resorte l_0 encuentre el valor $l_o^{'}$ para cuando el bloque y la cuña están en reposo.

b.) Encuentre el Lagrangeano como función de x (coordenada de la cuña) y el largo l del resorte. Escriba las ecuaciones de movimiento.

c.) ¿Cuales son las frecuencias propias de pequeñas oscilaciones?

Solucion: El largo buscado, resulta ser: $l_0^{'} = mg \cdot sin(\alpha)/K + l_0$. Y las frecuencias propias resultan ser:

$$w_1^2 = 0$$

$$w_2^2 = \frac{K(M+m)}{m(M+m \cdot sin^2(\alpha))}$$

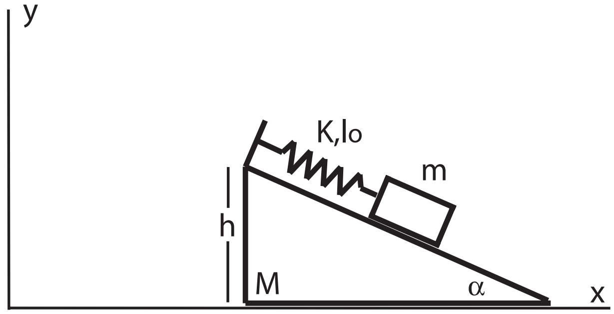

Figura 11: Figura problema 12

Problema 13: (SUNY, Buffalo) En la teoría de pequeñas oscilaciones, uno encuentre el Lagrangeano en la forma $L = T - V$, donde:

$$T = \sum_{i,j=1}^{N} \dot{q}_i a_{ij} \dot{q}_j$$

$$V = \sum_{i,j=1}^{N} q_i a_{ij} q_j$$

Las matrices entonces quedan definidas como $A = (a_{ij})$ y $B(b_{ij})$ que resultan ser reales y simétricas.

a.) Pruebe que A es semidefinida positiva, i.e.

$$x^t A x \geq 0$$

para un vector arbitrario de x. Pruebe que en general los valores propios de esta matriz son mayores o igual a cero.

b.) Muestre que $det|A| > 0$.

c.) Se introducen las nuevas cordenadas θ_j por:

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} (A^{\frac{-1}{2}} S)_{ij} \theta_j$$

Donde S es una matriz de $N \times N$. Muestre que S puede ser elegida de tal forma que tanto A como B pueden ser diagonalizadas. Interprete los elementos de la diagonal de la tranformación de B.

3. Referencias

[1] *Problems and Solution on Mechanics*, Lim Yung-kuo, Editorial World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Año 1994

[2] *Introductory Classical Mechanics, with Problems ans Solutions*, David Morin, Harvard University, Año 2003