Solución Problema 7 - *Teorema del Raquet de Tenis*

Solución por Carlos Suazo Martínez

- *Rotación entorno del eje $\hat{x_1}$:* Si el raquet es rotado (cercanamente) alrededor del eje $\hat{x}_1$, entonces las velocidades iniciales ω_2 y ω_3 son mucho más pequeñas que ω_1. Para enfatizar esto, llamemos $\omega_2 \rightarrow \epsilon_2$ y $\omega_3 \rightarrow \epsilon_3$. Entonces las ecuaciones de Euler toman la forma de (con torque idénticamente nulo, pues sólo la gravedad actúa sobre el raquet):

$$\dot{\omega_1} - A\epsilon_2\epsilon_3 = 0 \tag{1}$$
$$\dot{\epsilon_2} + B\omega_1\epsilon_3 = 0 \tag{2}$$
$$\dot{\epsilon_3} - C\omega_1\epsilon_2 = 0 \tag{3}$$

Donde hemos definido (por conveniencia)[1]:

$$A \equiv \frac{I_2 - I_3}{I_1}$$

$$B \equiv \frac{I_1 - I_3}{I_2}$$

$$C \equiv \frac{I_1 - I_2}{I_3}$$

Nuestro objetivo es mostrar que si los $\epsilon's$ comienzan pequeños, entonces se mantendrán pequeños. Asumiendo que ellos son pequeños (lo cual es cierto inicialmente), la primera ecuación dice que $\dot{\omega_1} \approx 0$ (debido a la aproximación de primer orden). Así podemos asumir que ω_1 es esencialmente constante (cuando los $\epsilon's$ son pequeños). Derivando la segunda ecuación con respecto al tiempo, y reemplazando la derivada de ϵ_3 en ésta ecuación se tiene que:

$$\ddot{\epsilon_2} = -(BC\omega_2^2)\epsilon_2$$

Debido a que el coeficiente negativo se encuentra al lado derecho, tenemos que la ecuación anterior describe un movimiento armónico simple. Así ϵ_2 oscila sinusoidalmente alrededor de cero. Por ésta razón, si comienza pequeño se mantiene pequeño. Por la misma razón ϵ_3 se mantiene pequeño.

- *Rotación entorno del eje $\hat{x_3}$:* El cálculo es exacto al planteado arriba, excepto que *1* es intercambiado por *3*. Encontramos que si ϵ_1 y ϵ_2 comienzan pequeños, se mantendrán pequeños. Y $\omega \approx (0, 0, \omega_3)$ todo el tiempo.

- *Rotación entorno del eje $\hat{x_2}$:* Si el raquet es rotado (cercanamente) alrededor del ejer $\hat{x_2}$, entonces las velocidades iniciales ω_1 y ω_3 son mucho más pequeñas que ω_2. Como arriba, enfatizemos esto renombrando $\omega_1 \rightarrow \epsilon_1$ y $\omega_3 \rightarrow \epsilon_3$. Como arriba, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\epsilon_1} - A\omega_2\epsilon_3 = 0 \tag{4}$$
$$\dot{\omega_2} + B\epsilon_1\epsilon_3 = 0 \tag{5}$$
$$\dot{\epsilon_3} - C\omega_2\epsilon_1 = 0 \tag{6}$$

Nuestro objetivo es mostrar que si los $\epsilon's$ comienzan pequeños, estos NO se mantendrán pequeños. Asumiendo que son pequeños (lo cual inicialmente resulta ser cierto) con la segunda ecuación (aproximación de primer orden) podemos decir que $\omega_2 \approx ctte$. Resolviendo el resto de las ecuaciones anteriores se tiene que:

$$\ddot{\epsilon_1} = (AC\omega_2^2)\epsilon_1$$

Debido a que existe un coeficiente positivo al lado derecho, la ecuación describe una exponencial creciente, en vez de una oscilación oscilatoria. Es por esta razón que ϵ_1 crece rápidamente desde la condición inicial pequeña. Por el mismo razonamiento, ϵ_3 se vuelve grande.

[1] Notar que tanto A, B como C son positivos (esto es un hecho muy importante)