Pauta Ejercicio 1
Sistemas Dinámicos FI21B

Profesor Nicolás Mujica
Pauta por Carlos Suazo M.
24 de Agosto 2004

(a) Cuántas coordenadas independientes tiene este sistema?. Cuáles son las coordenadas generalizadas? [**1.5 ptos.**]
Solución: Claramente en nuestro sistema existen 2 grados de libertad. Esto dado a que para $n = 3N - K, N$ el número de partículas es 2, mientras que el número de restricciones K son 4 (2 dado a que m_2 sólo se mueve verticalmente, 1 por que m_1 está en el plano y 1 por el largo l de la cuerda). Entonces, dado a que tenemos 2 grados de libertad podemos tomar como coordenadas generalizadas los parámetros r y θ de las coordenadas polares, para la masa m_1. Con esto nuestro sistema queda perfectamente descrito.

(b) Escriba el Lagrangiano del sistema y deduzca las ecuaciones de movimiento. [**1.5 ptos.**]
Solución: Dado a que tenemos nuestras coordenadas generalizadas, debemos escribir el Lagrangiano, pero antes si denotamos al parámetro x como la distancia medida desde el plano hasta la partícula de masa m_2 tenemos:

$$x + r = l \Rightarrow x = l - r \Rightarrow \dot{x} = -\dot{r} \tag{1}$$

Entonces de (1) más la velocidad en coordenadas polares tenemos que:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2$$

$$V = -m_2gx = -m_2g(l - r)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mg(l - r) \tag{2}$$

Entonces con (2) podemos deducir las ecuaciones de movimiento de nuestro sistema:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{r} - m_1r\dot{\theta}^2 + m_2g = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\big(m_1r^2\theta\big) = 0 \Rightarrow m_1r^2\dot{\theta} = cte = l_0 \tag{4}$$

Donde l_0 representa el **momentum angular**.

(c) Cuáles son las cantidades conservadas?. Justifique su respuesta desde el punto de vista de la mecánica de Lagrange.[**1.0 pto.**]

Solución: Además de conservarse la energía (ya que el sistema es conservativo), gracias a la ecuación obtenida para $\dot{\theta}$ podemos decir que también el momento angular l_0 es conservado, quedando la siguiente igualdad:

$$\dot{\theta} = \frac{l_0}{m_1 r^2} \tag{5}$$

(d) Obtenga una ecuación diferencial de segundo orden para una de las coordenadas generalizadas. Interprete cada término de esta ecuación.[**1.0 pto.**]
Solución: Si reemplazamos la ecuación anteriormente obtenida en la ecuación (3) tenemos que:

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} = \frac{l_0^2}{m_1 r^3} - m_2 g \tag{6}$$

A partir de esto podemos ver que hemos obtenido una ecuación del estilo $M\ddot{r} = -\frac{\partial V_{eff}}{\partial r}$ donde V_{eff} recibe el nombre de **Potencial Efectivo** y M es la masa total del sistema.

(e) Ahora suponga que la masa m_2 no está restringida a moverse en forma vertical, cuáles son las coordenadas generalizadas en este caso?. Qué cantidad conservada adicional aparece en el problema?. [**1.0 pto.**]
Solución: Claramente aparecen 2 grados de libertad que el problema antes no tenía. Tomemos además un sistema de coordenadas esférico para describir el movimiento de la partícula 2[1]. Vamos a seguir ocupando el sistema polar para la partícula 1, podemos mezclar estos dos sistemas de coordenadas para encontrar la energía cinética del sistema por que ambos son inerciales y lo que necesitamos son magnitudes que necesariamente no dependen del sistema seleccionado. Luego:

$$\vec{r_2} = (l - r)\hat{r}$$

$$\dot{\vec{r_2}} = -r\hat{r} + (l - r)\dot{\theta_2}\hat{\theta_2} + \dot{\phi} sin(\theta_2)(l - r)\hat{\phi}$$

Elevamos cada término al cuadrado (lo podemos hacer por que los vectores unitarios son ortogonales) y escribimos el Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2(r^2 + (l - r)^2\dot{\theta_2}^2 + (l - r)^2\dot{\phi}^2 sin^2(\theta_2) + m_2 g(l - r)cos(\theta_2)$$

Si derivamos con respecto a ϕ, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\Big(m_2\dot{\phi} sin^2(\theta_2)(l - r)^2\Big) = 0$$

Luego lo que se conserva es el momentum angular para ϕ, i.e.,para la patícula de masa m_2.

[1]De la 2 coordenadas generalizadas que se tenían antes, sumamos los parámetros θ_2 y ϕ. Es de esta forma como tenemos nuestras 4 coordenadas generalizadas para los 4 grados de libertad.