

**TEMA 5**  
**ECUACIONES GENERALES DE LA HIDRAULICA EN MEDIOS POROSOS**

**CI51J Hidráulica de Aguas Subterráneas y Su Aprovechamiento**

Profesor C. Espinoza  
Semestre Otoño 2005

**INDICE**

1.	INTRODUCCIÓN.....	1
2.	CONSERVACION DE MASA PARA FLUJO EN UN MEDIO SATURADO .....	1
3.	ECUACION DE FLUJO EN SITUACIONES ESPECIFICAS .....	6
3.1	Flujo en un Acuífero Confinado .....	6
3.2	Flujo en un Acuífero no Confinado .....	7
3.3	Flujo en un Acuífero Confinado Rodeado por Dos Estratos Permeables .....	8
4.	ECUACION DE LAPLACE .....	10
4.1	Aspectos Generales.....	10
4.2	Métodos de Solución para la Ecuación de Laplace.....	10
5.	SOLUCION DIRECTA DE LA ECUACION DE LAPLACE .....	12
5.1	Escurrecimiento Unidireccional en un Acuífero Confinado.....	12
5.2	Escurrecimiento Unidireccional en un Acuífero No Confinado .....	13
5.3	Flujo en un Acuífero Confinado por un Estrato Superior Semipermeable .....	14
5.4	Escurrecimiento Radial Bidimensional en un Acuífero Confinado .....	16
5.5	Superposición de Soluciones .....	17
5.6	Escurrecimiento Bidimensional entre una Captación Puntual y una Fuente Longitudinal..	19
6.	INTEGRACION DE ECUACIONES SIMPLIFICADAS .....	23
6.1	Escurrecimiento Unidireccional en un Acuífero Confinado.....	23
6.2	Escurrecimiento Unidireccional en un Acuífero No Confinado con Recarga .....	23
6.3	Escurrecimiento Radial hacia un Pozo de Bombeo en un Acuífero Confinado .....	25
6.4	Escurrecimiento Radial hacia un Pozo de Bombeo en un Acuífero No Confinado .....	26
6.5	Escurrecimiento Esférico hacia una Captación Puntual .....	28
6.6	Interacción entre un Pozo de Bombeo y Flujo Natural de la Napa.....	30
6.7	Intrusión Salina en Acuíferos Costeros .....	33
7.	REDES DE FLUJO.....	38
7.1	Aspectos Generales.....	38
7.2	Líneas de Flujo.....	39
7.3	Caudal que circula entre líneas de flujo .....	40
7.4	Líneas equipotenciales .....	42
7.5	Redes de Flujo .....	43
7.6	Escurrecimientos en materiales con permeabilidad diferentes .....	45
7.7	Caso en que las permeabilidades vertical y horizontal son diferentes .....	46
7.8	Fijación de la superficie libre de un escurrecimiento .....	48
7.9	Refracción de líneas de flujo al pasar de un medio de distinta permeabilidad a otra .....	50
7.10	Ejemplo de Red de Flujo .....	52

8.	MODELOS NUMERICOS .....	53
8.1	Introducción.....	53
8.2	Diferencias Finitas .....	53

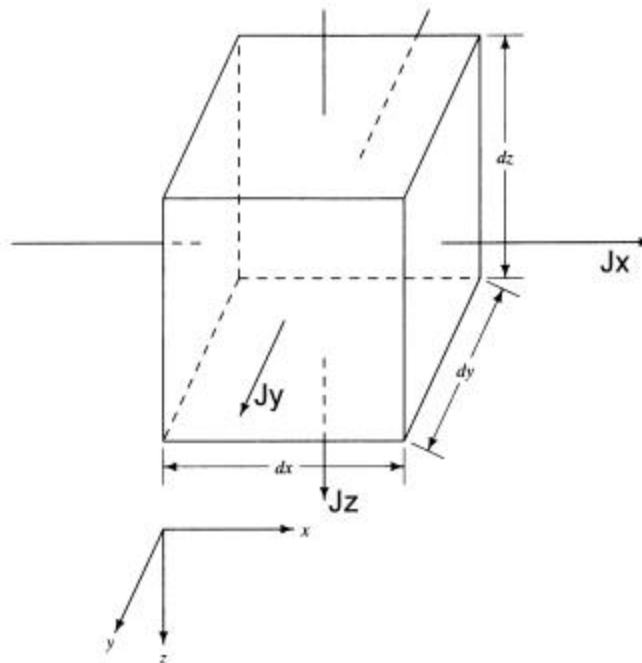
## 1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo contiene diversos aspectos fundamentales referentes a la hidráulica del escurrimiento en medios porosos saturados. Se aborda en detalle el planteamiento de las ecuaciones básicas que rigen el escurrimiento a través de un medio saturado y se describen diversas metodologías para resolver estas ecuaciones y encontrar expresiones útiles para diversas evaluaciones cuantitativas.

## 2. CONSERVACION DE MASA PARA FLUJO EN UN MEDIO SATURADO

Consideremos un volumen de control rectangular como el que se muestra en la Figura 5.1. Este volumen de control tiene dimensiones  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$ , mientras que su centro de masa P se encuentra ubicado en las coordenadas  $(x,y,z)$ .

**Figura 5.1**  
**Volumen de Control**



Si no existen fuentes o sumideros dentro del área de control, la conservación de la masa establece:

$$\begin{array}{lcl} \text{Flujo neto de fluido en el} & & \text{Tasa de cambio de la masa de} \\ \text{volumen de control} & G_T = & \text{fluido dentro del volumen de} \\ & & \text{control} \end{array} \quad \frac{\partial M}{\partial t}$$

Supongamos que el vector  $\underline{J}$  representa el flujo de masa (masa por unidad de área y tiempo) de agua con densidad  $\rho$  en el punto  $P(x,y,z)$ . Entonces:

$$\underline{J} = \underline{r} \cdot \underline{v} \quad (5.1)$$

donde  $\underline{v}$  es el vector de descarga específica.

Si nos referimos a la Figura 5.1, el flujo neto de masa en la dirección x,  $G_x$ , se puede escribir como:

$$G_x = \left( J_x \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}, y, z} - J_x \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}, y, z} \right) \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (5.2)$$

En forma similar, en las direcciones y y z podemos escribir:

$$G_y = \left( J_y \Big|_{x, y-\frac{\Delta y}{2}, z} - J_y \Big|_{x, y+\frac{\Delta y}{2}, z} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z \quad (5.3)$$

$$G_z = \left( J_z \Big|_{x, y, z-\frac{\Delta z}{2}} - J_z \Big|_{x, y, z+\frac{\Delta z}{2}} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (5.4)$$

El flujo neto de masa dentro del área de control,  $G_T$ , está dado por la suma de las cantidades mostradas en las ecuaciones (5.2), (5.3) y (5.4); esto es:

$$G_T = \left( J_x \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}, y, z} - J_x \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}, y, z} \right) \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \left( J_y \Big|_{x, y-\frac{\Delta y}{2}, z} - J_y \Big|_{x, y+\frac{\Delta y}{2}, z} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \left( J_z \Big|_{x, y, z-\frac{\Delta z}{2}} - J_z \Big|_{x, y, z+\frac{\Delta z}{2}} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (5.5)$$

La masa de fluido almacenada dentro del volumen de control está dada por la densidad del fluido, la porosidad del medio y las características geométricas de éste, i.e:

$$M = \mathbf{r} \cdot n \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (5.6)$$

Dado que las dimensiones del volumen de control se mantienen fijas en el tiempo, la tasa temporal de cambio de la masa almacenada dentro de éste es:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r} \cdot n) \quad (5.7)$$

Una forma alternativa de expresar la tasa de variación temporal de la masa almacenada dentro del volumen de control puede ser derivada a partir de la definición del almacenamiento específico,  $S_s$ . Recordemos la definición de  $S_s$ :

$$S_s = \frac{\Delta V_w}{V_T \cdot \Delta h} \quad (5.8)$$

donde  $\Delta V_w$  es el cambio en el volumen de agua liberado por un volumen de acuífero  $V_T$  cuando la carga hidráulica cambia en un  $\Delta h$ . De esta forma, la tasa de variación temporal de la masa almacenada dentro del volumen de control  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ , suponiendo que el fluido no experimenta variación de densidad, es igual a:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{S}_s \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.9)$$

Considerando la conservación de masa podemos igualar las expresiones (5.5) y (5.9). Al dividir ambas expresiones por  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  obtenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Delta x} \cdot \left( J_x \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}, y, z} - J_x \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}, y, z} \right) - \frac{1}{\Delta y} \cdot \left( J_y \Big|_{x, y+\frac{\Delta y}{2}, z} - J_y \Big|_{x, y-\frac{\Delta y}{2}, z} \right) - \\ - \frac{1}{\Delta z} \cdot \left( J_z \Big|_{x, y, z+\frac{\Delta z}{2}} - J_z \Big|_{x, y, z-\frac{\Delta z}{2}} \right) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{S}_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.10)$$

A continuación podemos tomar el límite de la ecuación anterior cuando el tamaño del volumen de control se reduce, es decir,  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ , y  $\Delta z \rightarrow 0$ . En este caso conviene recordar la definición de una derivada parcial:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{J_x \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}, y, z} - J_x \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}, y, z}}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} J_x \quad (5.11)$$

De esta manera, al reemplazar la definición de una derivada parcial en la ecuación (5.10) obtenemos:

$$-\left( \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{S}_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.12)$$

lo que puede ser escrito en forma reducida como:

$$-\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{S}_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.13)$$

Si en la derivación de la ecuación (5.12) se hubiera utilizado la ecuación (5.7) el resultado anterior se habría modificado como sigue:

$$-\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \quad (5.14)$$

A continuación tratemos de expresar la ecuación (5.12) en términos de cantidades o variables de importancia en aguas subterráneas. El lado izquierdo de la ecuación (5.12) puede ser expandido utilizando la definición del flujo másico,  $\underline{\mathbf{J}}$ , dado por la ecuación (5.1):

$$-\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}} = -\nabla \cdot (\mathbf{r} \cdot \underline{\mathbf{v}}) = -\mathbf{r} \cdot \nabla \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{r} \quad (5.15)$$

En la mayoría de los problemas prácticos, el segundo término en la ecuación (5.15) es despreciable con respecto a los otros términos en la ecuación básica de continuidad. Por ejemplo, en una situación que involucra un fluido incompresible como el agua, la variación de

densidad del fluido es prácticamente nula. De esta manera, podemos escribir para la ecuación (5.12):

$$-\nabla \cdot \underline{v} = S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.16)$$

en la cual se ha eliminado el segundo término en la expansión de la ecuación (5.14) y se ha dividido por la densidad del fluido.

Utilizando la ley de Darcy podemos desarrollar aún más la ecuación (5.16) para obtener una expresión más completa de la ecuación básica de continuidad. En este caso, si suponemos que el medio poroso es heterogéneo y anisotrópico, y que además el sistema de coordenadas x, y, z está alineado con las direcciones principales de anisotropía, podemos escribir a partir de la ley de Darcy:

$$v_x = -K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.17a)$$

$$v_y = -K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \quad (5.17b)$$

$$v_z = -K_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \quad (5.17c)$$

Substituyendo la expresión de la ley de Darcy en la ecuación básica de continuidad se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.18)$$

La ecuación (5.18) es un resultado fundamental para el flujo a través de un medio poroso saturado, bajo condiciones transientes. Si consideramos que el medio es homogéneo pero anisotrópico, la ecuación (5.18) se puede escribir como sigue:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.19)$$

Si consideramos un escurrimiento en régimen permanente o estacionario, y que además el medio acuífero es homogéneo e isotrópico ( $K_x = K_y = K_z = \text{constante}$ ), podemos escribir la ecuación (5.19) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (5.20)$$

la que comúnmente se conoce como la ecuación de Laplace. En forma reducida esta ecuación se puede escribir como:

$$\nabla^2 h = 0 \quad (5.21)$$

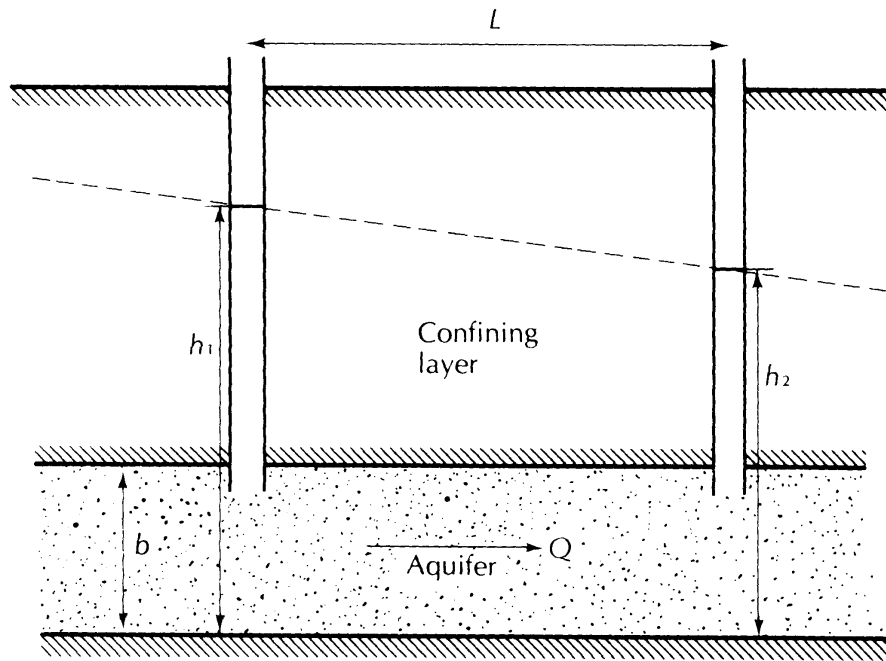
donde  $\nabla^2$  es el operador Laplaciano.

### 3. ECUACION DE FLUJO EN SITUACIONES ESPECIFICAS

#### 3.1 Flujo en un Acuífero Confinado

En este caso supongamos que el flujo es horizontal y bidimensional, es decir  $v_z \ll v_x, v_y$ . Si repetimos los argumentos dados en un principio para desarrollar un balance de masas usando un volumen de control de dimensiones  $b \cdot \Delta x \cdot \Delta y$ , podemos escribir para el flujo de agua hacia el volumen de control lo siguiente (ver Figura 5.2):

**Figura 5.2**  
**Flujo en un Acuífero Confinado**



$$\underline{q}^* = \underline{r} \cdot \underline{b} \cdot \underline{v} = -\underline{r} \cdot \underline{b} \cdot \underline{K} \cdot \nabla h = -\underline{r} \cdot \underline{T} \cdot \nabla h \quad (5.22)$$

donde  $\underline{K}$  y  $\underline{T}$  son el tensor conductividad hidráulica y el tensor transmisibilidad, respectivamente. El flujo neto de agua que pasa a través del área de control,  $G_T$ , es:

$$G_T = \left( q_x^* \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}, y} - q_x^* \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}, y} \right) \cdot \Delta y + \left( q_y^* \Big|_{x, y-\frac{\Delta y}{2}} - q_y^* \Big|_{x, y+\frac{\Delta y}{2}} \right) \cdot \Delta x \quad (5.23)$$

La tasa de cambio del fluido contenido dentro del volumen de control mostrado en la Figura 5.2 se deriva desde la definición de  $S$ :

$$S = \frac{\Delta V_w}{A \cdot \Delta h} = \frac{\Delta V_w}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta h} \quad (5.24)$$



A partir de lo anterior, la tasa de variación de la masa de fluido contenida en el volumen de control puede ser escrita como:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{S} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.25)$$

Al considerar las condiciones de continuidad y tomando el límite cuando el volumen de control se hace infinitesimalmente pequeño se obtiene:

$$-\left(\frac{\partial q_x^*}{\partial x} + \frac{\partial q_y^*}{\partial y}\right) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{S} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.26)$$

Finalmente, al reemplazar la expresión del flujo másico a través del volumen de control se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.27)$$

donde  $S = S_s \cdot b$ , es el coeficiente de almacenamiento, y suponiendo que  $x$  e  $y$  son las direcciones principales de anisotropía para la transmisibilidad.

### 3.2 Flujo en un Acuífero no Confinado

En este caso supongamos que el flujo es horizontal y bidimensional, para lo cual recurriremos a la hipótesis de Dupuit-Forcheimer; es decir la pendiente del nivel freático o plano de carga es muy pequeña con lo cual la velocidad vertical es prácticamente despreciable y por lo tanto el flujo es horizontal. La aproximación de Dupuit nos permite escribir:

$$\underline{q}^* = \mathbf{r} \cdot h \cdot \underline{\mathbf{v}} = -\mathbf{r} \cdot h \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \nabla h \quad (5.28)$$

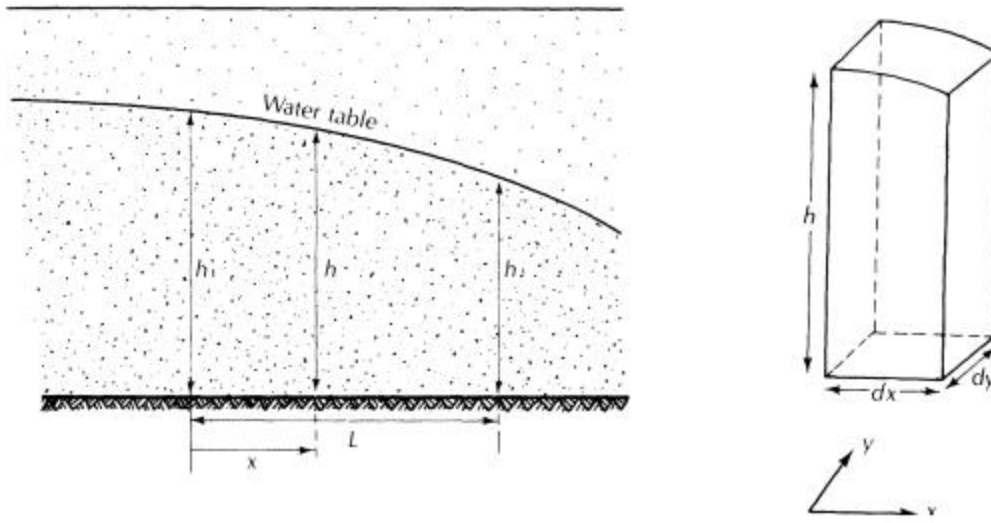
donde  $\underline{\underline{K}}$  es el tensor conductividad,  $h$  es el espesor saturado,  $\rho$  es la densidad del fluido y  $\underline{q}^*$  es el flujo de masa por unidad de ancho.

Considerando conservación de masa sobre el volumen de control indicado en la Figura 5.3 nos permite escribir, al igual que para un acuífero confinado:

$$\left( q_x^* \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}, y} - q_x^* \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}, y} \right) \cdot \Delta y + \left( q_y^* \Big|_{x, y-\frac{\Delta y}{2}} - q_y^* \Big|_{x, y+\frac{\Delta y}{2}} \right) \cdot \Delta x = \mathbf{r} \cdot \mathbf{S} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.29)$$

donde  $S$  es el coeficiente de almacenamiento, el cual para un acuífero confinado coincide con la capacidad específica,  $S_y$ , la que mide el volumen de agua que se libera de almacenamiento por unidad de área y de cambio unitario en la carga hidráulica  $h$ .

**Figura 5.3**  
**Flujo en un Acuífero No Confinado o Libre**



Si dividimos por  $Dx \cdot Dy$  y luego tomamos el límite cuando el volumen de control se hace infinitesimalmente pequeño obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) = S_y \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.30)$$

donde  $x$  e  $y$  son las direcciones principales de anisotropía para la conductividad hidráulica.

### 3.3 Flujo en un Acuífero Confinado Rodeado por Dos Estratos Permeables

Consideremos el caso de un acuífero confinado como en la Figura 5.2, el cual está acotado superior e inferiormente por estratos permeables (ver Figura 5.4). En este caso  $W_1$  y  $W_2$  son los flujos verticales que atraviesan a través de cada estrato entrando y saliendo del volumen de control. En este caso se supone que el flujo en el acuífero confinado es básicamente horizontal, mientras que en los estratos confinantes (acuitardos) el flujo es vertical. Luego de aplicar conservación de masa al volumen de control se obtiene:

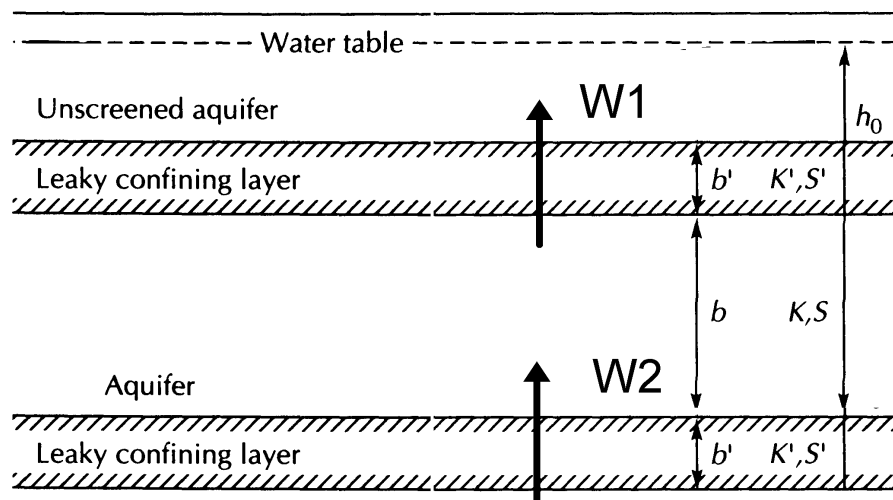
$$-\left( \frac{\partial q_x^*}{\partial x} + \frac{\partial q_y^*}{\partial y} \right) + W_2^* - W_1^* = r \cdot S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.31)$$

Si dividimos por la densidad del fluido y reemplazamos la definición de los flujos en las direcciones  $x$  e  $y$  obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + W_2 - W_1 = S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (5.32)$$

donde  $W^* = r \cdot W$ .

**Figura 5.4**  
**Acuífero Confinado Rodeado por Estratos Semipermeables**



## 4. ECUACION DE LAPLACE

### 4.1 Aspectos Generales

Si consideramos un escurrimiento en régimen permanente o estacionario, y que el medio acuífero es homogéneo e isotrópico ( $K_x = K_y = K_z = \text{constante}$ ), podemos escribir la ecuación (5.18) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (5.33)$$

la que comúnmente se conoce como la ecuación de Laplace. En forma reducida esta ecuación se puede escribir como:

$$\nabla^2 h = 0 \quad (5.34)$$

Considerando un elemento diferencial de forma cilíndrica se puede escribir la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, las que utilizan el sistema de coordenadas  $(r, \theta, z)$  en vez del sistema cartesiano  $(x, y, z)$ . Utilizando este nuevo sistema de coordenadas la ecuación de Laplace se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (5.35)$$

Utilizando coordenadas esféricas, en las cuales el sistema cartesiano  $(x, y, z)$  se reemplaza por un sistema de coordenadas  $(r, \theta, \phi)$ , se obtiene para la ecuación de Laplace la siguiente expresión:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} = 0 \quad (5.36)$$

### 4.2 Métodos de Solución para la Ecuación de Laplace

Los principales métodos que se dispone para la solución de problemas relacionados con el escurrimiento en medios porosos bajo condiciones de escurrimiento permanente son los siguientes:

#### 4.2.1 Solución Directa de la Ecuación de Laplace

En este tipo de métodos se busca una expresión analítica que satisfaga la ecuación de Laplace, así como también las condiciones de borde que describen el problema. La aplicación de este tipo de método se encuentra restringida a problemas de geometría muy simple, pero que son de aplicación directa en muchas situaciones prácticas.

#### **4.2.2 Integración de Ecuaciones Simplificadas**

En este enfoque de solución se plantea en forma simple relaciones que permitan definir líneas de flujo y equipotenciales para el problema específico que se desea estudiar. Este tipo de enfoque está restringido a situaciones muy simples en las cuales se tenga alguna idea del tipo de solución o forma del escurrimiento a través del medio poroso permeable.

#### **4.2.3 Redes de Flujo**

Dado su característica de flujo laminar e irrotacional, un sistema de aguas subterráneas puede ser representado en tres dimensiones por medio de un conjunto de superficies equipotenciales y un conjunto de líneas de flujo ortogonales. En aquellos casos en que es posible identificar una sección bidimensional representativa del problema en estudio el conjunto de equipotenciales y líneas de flujo constituye una Red de Flujo. La construcción de una Red de Flujo es una de las herramientas de análisis más poderosas que se ha utilizado históricamente en el área de hidráulica de aguas subterráneas.

#### **4.2.4 Modelos Numéricos**

Ecuaciones diferenciales parciales (altamente no lineales en algunos casos) gobiernan el flujo de agua subterránea. Con la excepción de casos muy especiales estas ecuaciones diferenciales no pueden ser resueltas en forma directa. Métodos de análisis numéricos para la resolución de estas ecuaciones se basan en el reemplazo de una ecuación diferencial por un sistema matricial equivalente el cual puede ser resuelto mediante operaciones algebraicas más simples.

#### **4.2.5 Modelos Analógicos**

Estos métodos estudian el flujo de agua subterránea mediante analogías con otros fenómenos naturales que han sido previamente estudiados. De este modo, la conducción de energía eléctrica a través de conductores o de calor a través de una superficie sólida son dos fenómenos cuya representación matemática es similar a la del flujo del agua subterránea. De esta manera, mediante el estudio de estos fenómenos es posible identificar analogías con el comportamiento del agua en un medio poroso.

## 5. SOLUCION DIRECTA DE LA ECUACION DE LAPLACE

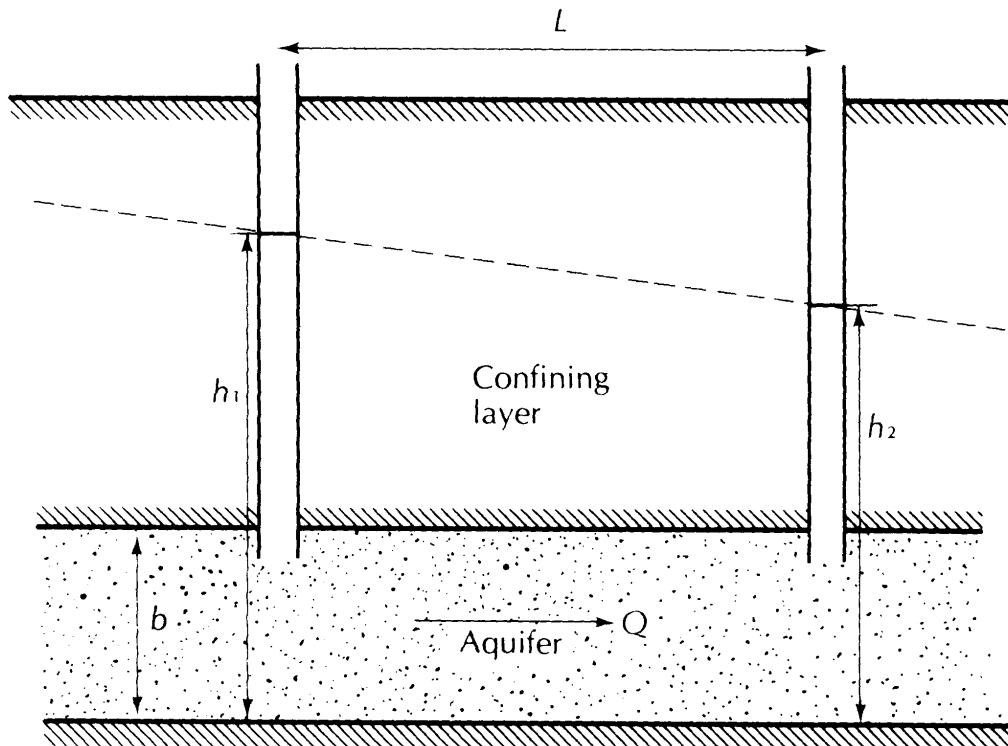
En este tipo de métodos se busca una expresión analítica que satisfaga la ecuación de Laplace, así como también las condiciones de borde que describen el problema. La aplicación de este tipo de método se encuentra restringida a problemas de geometría muy simple, pero que son de aplicación directa en muchas situaciones prácticas.

### 5.1 Esgurrimiento Unidireccional en un Acuífero Confinado

En este caso (ver Figura 5.5), la ecuación diferencial que describe esta situación se puede escribir a partir de la ecuación (5.27) de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx} \left( K \cdot b \cdot \frac{dh}{dx} \right) = 0 \quad (5.37)$$

**Figura 5.5**  
**Esgurrimiento Unidireccional en Acuífero Confinado**



en la cual se ha supuesto que el escurrimiento se realiza únicamente a lo largo de la dirección longitudinal. Suponiendo que el sistema acuífero es homogéneo esta ecuación se puede integrar fácilmente con lo cual obtenemos:

$$h(x) = \frac{c_1}{K \cdot b} \cdot x + c_2 \quad (5.38)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes de integración que pueden ser evaluadas a partir del conocimiento de dos condiciones de borde distintas. Para el caso indicado en la Figura 5.5 vemos que existen

dos condiciones de borde, las que indican que a una distancia  $x_1$  el nivel piezométrico es igual a  $h_1$ , mientras que en  $x_2$  es igual a  $h_2$ . Utilizando esas condiciones de borde obtenemos las siguientes expresiones para las constantes de integración:

$$c_1 = K \cdot b \cdot \frac{h_1 - h_2}{x_1 - x_2} \quad (5.39)$$

$$c_2 = \frac{h_2 \cdot x_1 - h_1 \cdot x_2}{x_1 - x_2} \quad (5.40)$$

lo que al ser substituido en la ecuación (5.38) nos da la siguiente expresión:

$$h(x) = \frac{h_1 - h_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \frac{h_2 \cdot x_1 - h_1 \cdot x_2}{x_1 - x_2} \quad (5.41)$$

A partir de la ecuación (5.41) y utilizando la ley de Darcy podemos calcular la velocidad de Darcy como:

$$v_x = -K \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = -K \cdot \frac{h_1 - h_2}{x_1 - x_2} \quad (5.42)$$

## 5.2 Ecurrimiento Unidireccional en un Acuífero No Confinado

En este caso (ver Figura 5.6), la ecuación diferencial que describe esta situación se puede obtener a partir de la ecuación (5.30) de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx} \left( K \cdot h \cdot \frac{dh}{dx} \right) = 0 \quad (5.43)$$

en la cual se ha supuesto que el escurrimiento se realiza únicamente a lo largo de la dirección longitudinal. Suponiendo que el sistema acuífero es homogéneo esta ecuación se puede integrar fácilmente con lo cual obtenemos:

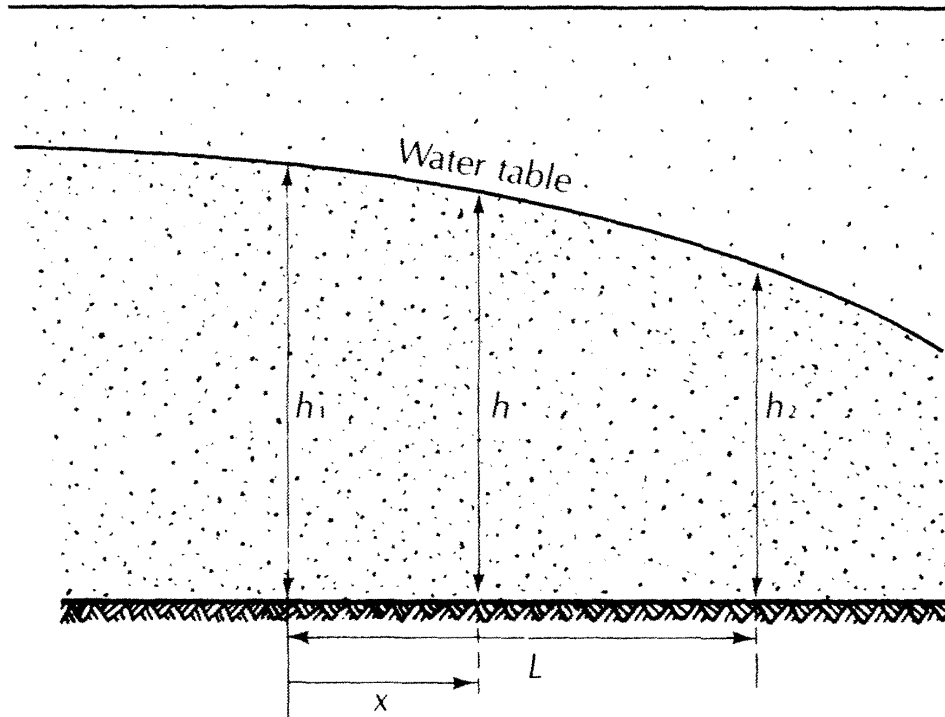
$$h^2(x) = \frac{2 \cdot c_1}{K} \cdot x + 2 \cdot c_2 \quad (5.44)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes que pueden ser evaluadas a partir del conocimiento de dos condiciones de borde distintas. Al igual que en el caso anterior se pueden utilizar dos condiciones de borde de nivel freático conocido (ver Figura 5.6) para obtener:

$$c_1 = \frac{K}{2} \cdot \frac{h_1^2 - h_2^2}{x_1 - x_2} \quad (5.45)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_2^2 \cdot x_1 - h_1^2 \cdot x_2}{x_1 - x_2} \quad (5.46)$$

**Figura 5.6**  
**Escorrimento Unidireccional en Acuífero No Confinado**



lo que al ser substituido en la ecuación (5.44) nos da la siguiente expresión:

$$h^2(x) = \frac{h_1^2 - h_2^2}{x_1 - x_2} \cdot x + \frac{h_2^2 \cdot x_1 - h_1^2 \cdot x_2}{x_1 - x_2} \quad (5.47)$$

Finalmente, la velocidad del escurrimiento se puede escribir como:

$$v(x) = -K \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{K}{2 \cdot h(x)} \cdot \frac{h_1^2 - h_2^2}{x_1 - x_2} \quad (5.48)$$

### 5.3 Flujo en un Acuífero Confinado por un Estrato Superior Semipermeable

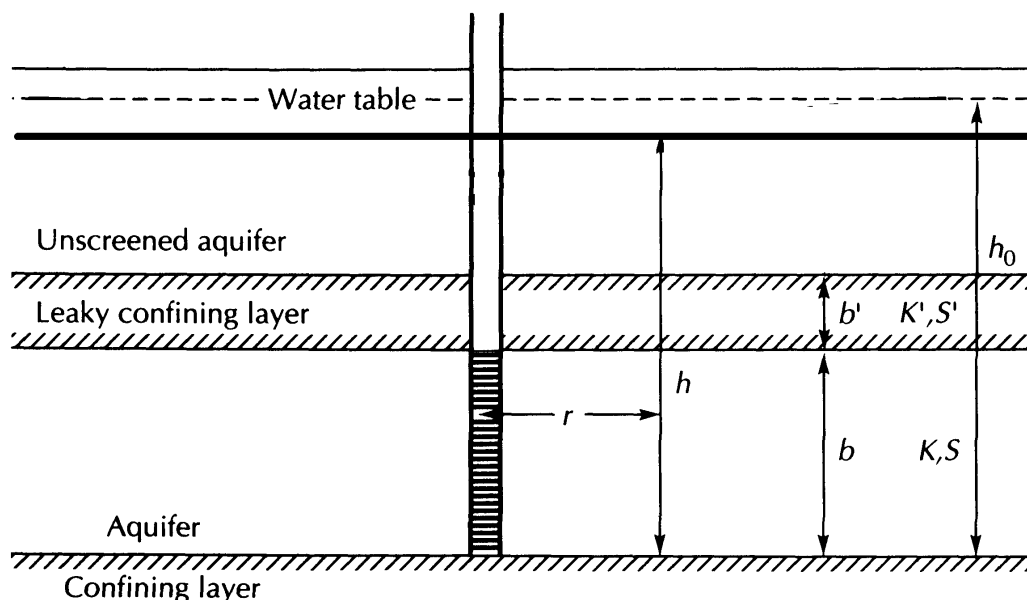
En este caso se plantea la situación indicada en la Figura 5.7, la cual muestra un acuífero confinado cuya conductividad hidráulica es  $K$  y su espesor saturado es  $b$ . Este acuífero se encuentra confinado por un estrato semipermeable de espesor  $b'$  y conductividad hidráulica  $K'$ . Sobre el estrato confinante semipermeable existe un sistema acuífero libre cuyo nivel freático es constante e igual a  $h_0$ .

La ecuación diferencial que describe este escurrimiento es:

$$K \cdot b \cdot \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{(h_0 - h) \cdot K'}{b'} = 0 \quad (5.49)$$



**Figura 5.7**  
**Acuífero Confinado Recargado a través de Estrato Semipermeable**



donde el segundo término describe la incorporación de agua desde el nivel freático superior, el cual se ha evaluado utilizando la ley de Darcy y el hecho que el escurrimiento en un acuitardo (acuífero semipermeable) es eminentemente vertical.

Para simplificar el enfoque de solución para este tipo de problema se acostumbra a utilizar el siguiente cambio de variable:

$$s = h_0 - h \quad (5.50)$$

donde  $s$  representa la diferencia de nivel piezométrico entre el acuífero superior libre ( $h_0$ ) y el inferior confinado ( $h$ ). Al reemplazar la transformación anterior en la ecuación diferencial (5.49) se obtiene:

$$K \cdot b \cdot \frac{d^2 s}{dx^2} - \frac{s \cdot K'}{b'} = 0 \quad (5.51)$$

cuya solución está dada por la siguiente expresión:

$$s(x) = h_0 - h(x) = c_1 \cdot e^{\frac{x}{B}} + c_2 \cdot e^{-\frac{x}{B}} \quad (5.52)$$

donde  $B$  es un parámetro que es función de las propiedades elásticas del acuitardo y del acuífero confinado:

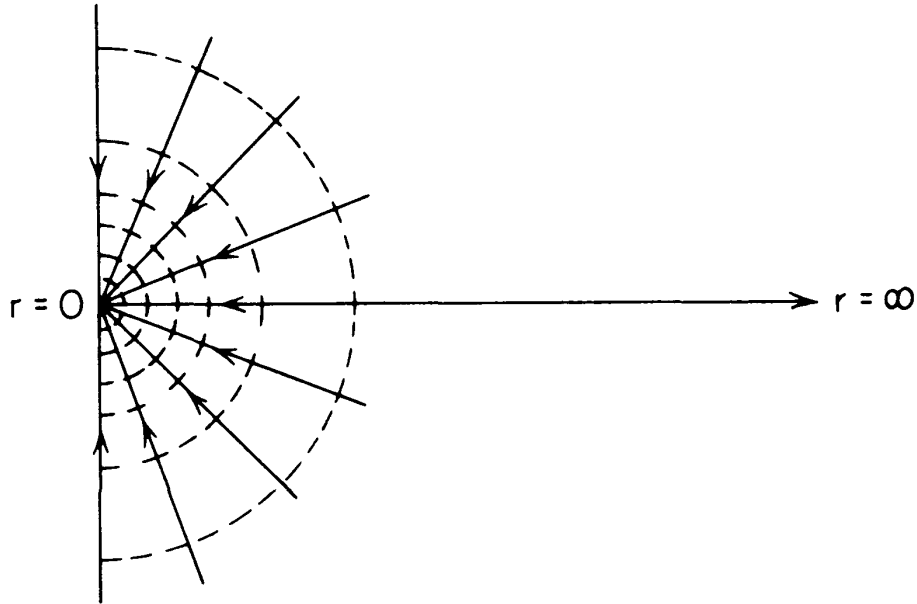
$$B = \sqrt{\frac{K \cdot b \cdot b'}{K'}} \quad (5.53)$$

Al igual que en las soluciones anteriores, al contar con dos condiciones de borde es posible calcular las constantes de integración  $c_1$  y  $c_2$ .

#### 5.4 Ecurrimiento Radial Bidimensional en un Acuífero Confinado

Este caso corresponde al escurrimiento hacia o desde un pozo (bombeo o infiltración, respectivamente) tal como se muestra en la Figura 5.8.

**Figura 5.8**  
**Ecurrimiento Radial hacia un Pozo de Bombeo**



En este caso se puede observar que el escurrimiento es básicamente radial, por lo que no existe componente de la velocidad en la dirección  $\theta$ . La ecuación de Laplace en este contexto se puede escribir como:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dh}{dr} + \frac{d^2h}{dr^2} = 0 \quad (5.54)$$

en la cual las componentes en las direcciones  $q$  y  $z$  se suponen iguales a cero. Por simple inspección se puede verificar que la función

$$h(r) = c_1 \cdot \ln(r) + c_2 \quad (5.55)$$

es solución de la ecuación diferencial anterior. Para completar este problema se deben cumplir las siguientes condiciones de borde (ver Figura 5.8):

$$r = r_1 \quad \rightarrow \quad h = h_1 \quad (5.56)$$

$$r = r_2 \quad \rightarrow \quad h = h_2 \quad (5.57)$$

Substituyendo las condiciones de borde anterior se tiene:

$$h(r) = \frac{h_2 - h_1}{\ln(r_2 / r_1)} \cdot \ln(r / r_1) + h_1 \quad (5.58)$$

lo que describe la variación de la cota piezométrica como una función de la distancia radial. También es posible calcular la velocidad de Darcy en la dirección radial a partir de:

$$v_r(r) = K \cdot \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{K}{r} \cdot \frac{h_2 - h_1}{\ln(r_2 / r_1)} \quad (5.59)$$

## 5.5 Superposición de Soluciones

En este método se considera el uso de soluciones analíticas para casos simples, las que se pueden superponer para obtener soluciones a casos más complejos. Un caso típico que permite ilustrar este tipo de soluciones es el que considera la operación conjunta de dos pozos de bombeo, según se muestra en las Figuras 5.9 y 5.10.

En este caso es posible superponer la solución correspondiente al descenso del nivel piezométrico debido al bombeo de cada pozo individual, en un punto cualquiera del espacio. La solución compuesta será representativa del efecto combinado de ambos pozos de bombeo.

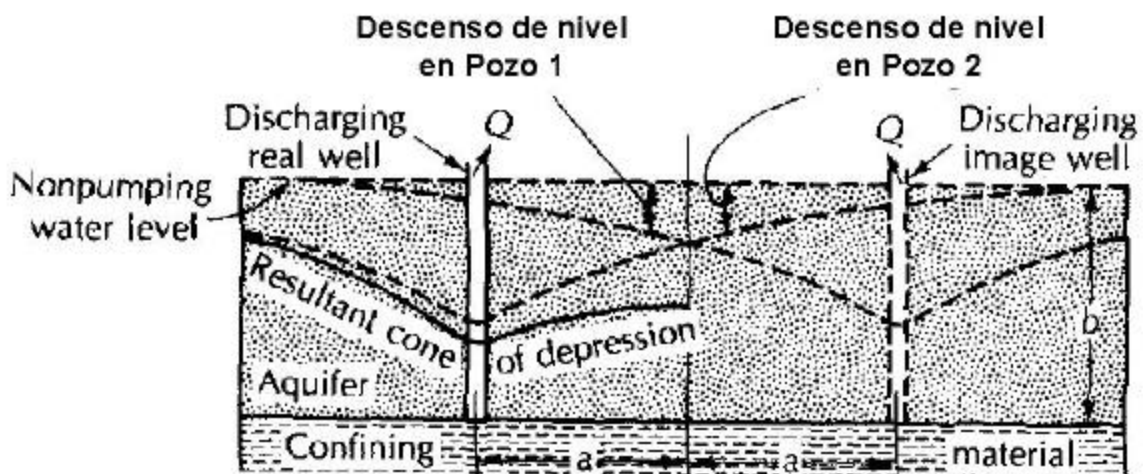
El valor del nivel piezométrico,  $h$ , debido al efecto del pozo bombeo 1,  $h_1(r)$ , está dado por una expresión similar a la ecuación (5.55):

$$h_1(r) = c_1 \cdot \ln(r_1) + c_2 \quad (5.60)$$

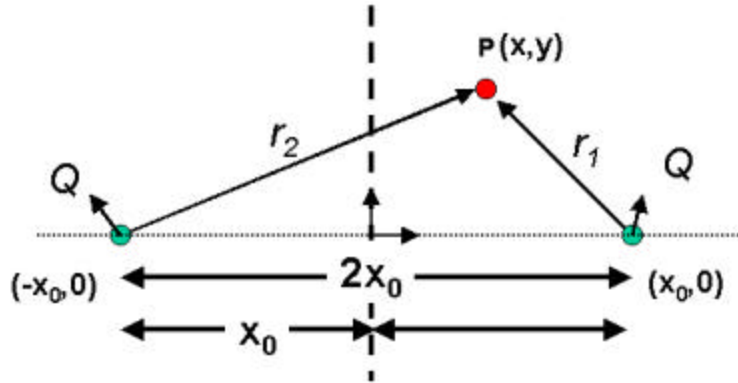
mientras que el valor de  $h$  debido al pozo de bombeo 2,  $h_2(r)$ , es igual a:

$$h_2(r) = c_1 \cdot \ln(r_2) + c_2 \quad (5.61)$$

**Figura 5.9**  
**Superposición de Pozos de Bombeo**



**Figura 5.10**  
**Superposición de Pozos de Bombeo (Visión en Planta)**



donde  $r_1$  y  $r_2$  son las distancias hacia el punto  $P$ , medidas desde el centro del pozo de bombeo 1 y 2, respectivamente. A partir de la Figura 5.10 podemos escribir para  $r_1$  y  $r_2$  las siguientes expresiones:

$$r_1^2 = (x - x_0)^2 + y^2 \quad (5.62)$$

$$r_2^2 = (x + x_0)^2 + y^2 \quad (5.63)$$

En el caso de los pozos de bombeo 1 y 2 podemos calcular las depresiones o descensos del nivel piezométrico como:

$$s_1(r) = h_0 - h_1(r) \quad (5.64)$$

$$s_2(r) = h_0 - h_2(r) \quad (5.65)$$

donde  $h_0$  es el nivel piezométrico inicial. Finalmente, el valor total del descenso en el nivel piezométrico, considerando la existencia de ambos pozos es:

$$s(r) = s_1(r_1) + s_2(r_2) = \{h_0 - h_1(r_1)\} + \{h_0 - h_2(r_2)\} \quad (5.66)$$

Al sustituir las expresiones para  $h_1$  y  $h_2$  se tiene:

$$s(r) = 2 \cdot h_0 - c_1 \cdot \log(r_1 \cdot r_2) - 2 \cdot c_2 \quad (5.67)$$

Si consideramos que en el pozo de bombeo 1 se ha medido el descenso del nivel piezométrico en equilibrio tenemos:  $r_1 = r_P$ ,  $s = s_P$ ,  $r_2 = 2 \cdot x_0$ , donde  $r_P$  es el radio del pozo,  $s_P$  es el descenso en el nivel piezométrico medido en el pozo de bombeo, y  $2x_0$  es la distancia entre el pozo de bombeo 1 y el pozo de bombeo 2. Utilizando esta información podemos evaluar la ecuación (5.67) para obtener la expresión siguiente:

$$s(r, r_1 = r_P, r_2 = 2 \cdot x_0) = s_P = 2 \cdot h_0 - c_1 \cdot \log(r_P \cdot 2 \cdot x_0) - 2 \cdot c_2 \quad (5.68)$$

Podemos incorporar una segunda condición al considerar que en el punto medio que separa a los dos pozos de bombeo el descenso del nivel piezométrico es conocido:  $r_1=x_0$ ,  $s=s_M$ ,  $r_2=x_0$ , donde  $s_M$  es el descenso en el nivel piezométrico medido en el punto medio entre los pozos de bombeo, y  $x_0$  es la mitad de la distancia entre el pozo de bombeo 1 y el pozo de bombeo 2. Utilizando esta información podemos evaluar la ecuación (5.67) para obtener la expresión siguiente:

$$s(r, r_1 = x_0, r_2 = x_0) = s_M = 2 \cdot h_0 - c_1 \cdot \log(x_0 \cdot x_0) - 2 \cdot c_2 \quad (5.69)$$

Utilizando las ecuaciones (5.68) y (5.69) se puede obtener el valor de las constantes  $c_1$  y  $c_2$ :

$$c_1 = \frac{s_M - s_P}{\text{Ln}\left(\frac{2 \cdot r_P}{x_0}\right)} \quad (5.70)$$

$$c_2 = h_0 - \frac{s_M - s_P}{\text{Ln}\left(\frac{2 \cdot r_P}{x_0}\right)} \cdot \text{Ln}(x_0) - \frac{s_M}{2} \quad (5.71)$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación (5.67) se obtiene:

$$s(x, y) = s_M - \frac{s_M - s_P}{\text{Ln}\left(\frac{2 \cdot r_P}{x_0}\right)} \cdot \text{Ln}\left(\frac{x_0^2}{(x-x_0)^2 + y^2} \cdot \frac{x_0^2}{(x+x_0)^2 + y^2}\right) \quad (5.72)$$

que representa el descenso en un punto de coordenadas (x,y) debido al efecto combinado de dos pozos de bombeo.

## 5.6 Ecurrimiento Bidimensional entre una Captación Puntual y una Fuente Longitudinal

Este método se basa en la superposición de soluciones a problemas de escurrimiento más simples, lo que permite obtener soluciones más generales que cumplen con nuevas condiciones de borde.

Para el caso del problema planteado podemos reemplazar la fuente lineal por un pozo imagen ubicado en una posición simétrica (espejo) con respecto a la captación real. Para cumplir con la condición de línea equipotencial el nuevo pozo debe ser de inyección.

El valor de  $h$  debido al efecto del pozo real,  $h_R(r)$ , está dado por una expresión similar a la ecuación (5.55):

$$h_R(r) = c_1 \cdot \text{Ln}(r_1) + c_2 \quad (5.73)$$

mientras que el valor de  $h$  debido al pozo imagen,  $h_I(r)$ , es igual a:

$$h_I(r) = c_1 \cdot \ln(r_2) + c_2 \quad (5.74)$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son las distancias hacia el punto P, medidas desde el centro del pozo real e imaginario, respectivamente. A partir de la Figura 5.11 podemos escribir para  $r_1$  y  $r_2$  las siguientes expresiones:

$$r_1^2 = (x - x_0)^2 + y^2 \quad (5.75)$$

$$r_2^2 = (x + x_0)^2 + y^2 \quad (5.76)$$

En el caso del pozo real e imaginario podemos calcular las depresiones o descensos del nivel piezométrico como:

$$s_R(r) = h_0 - h_R(r) \quad (5.77)$$

$$s_I(r) = h_0 - h_I(r) \quad (5.78)$$

donde  $h_0$  es el nivel piezométrico inicial. Finalmente, el valor total de  $h$  considerando la existencia de ambos pozos es:

$$h(r) = h_0 - s_R(r) + s_I(r) = h_0 + c_1 \cdot \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \quad (5.79)$$

La expresión (5.79) cumple con la condición de borde impuesta por la fuente lineal ya que para un punto sobre la posición de la fuente ( $r_1=r_2$ ) se cumple que el nivel piezométrico es constante ( $h = h_0$ ). Si consideramos que en el pozo real se ha medido el nivel piezométrico de equilibrio tenemos:  $r_1=r_P$ ,  $h=h_P$ ,  $r_2=2 \cdot x_0$ , donde  $r_P$  es el radio del pozo,  $h_P$  es el nivel piezométrico medido en el pozo de bombeo, y  $x_0$  es la distancia entre el pozo real y la fuente.

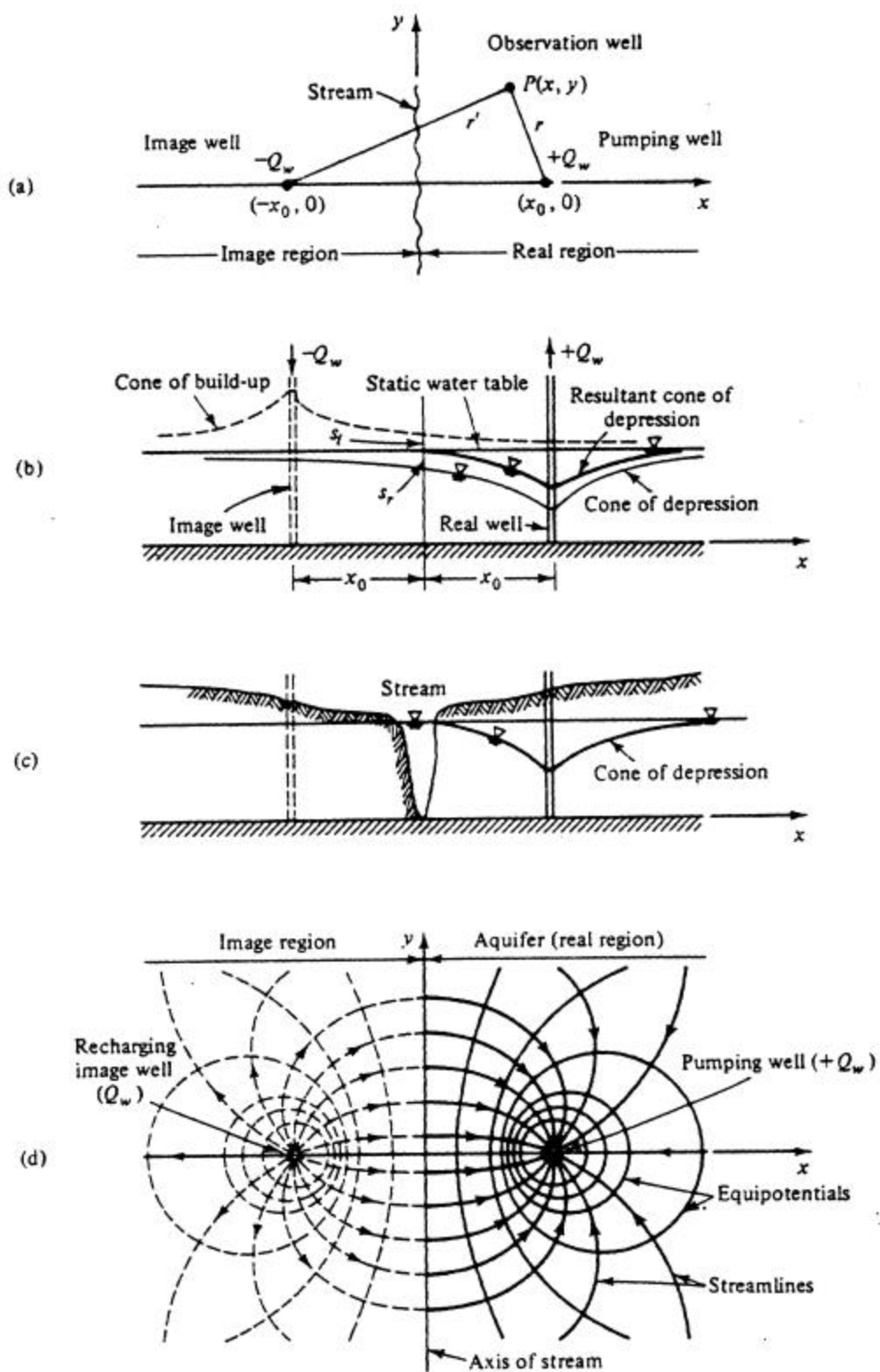
Utilizando esta información podemos evaluar la constante de integración en (5.79) para obtener la expresión siguiente:

$$h(x, y) = h_0 + \frac{h_P - h_0}{\ln\left(\frac{r_P}{2 \cdot x_0}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = h_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h_P - h_0}{\ln\left(\frac{r_P}{2 \cdot x_0}\right)} \cdot \ln\left(\frac{(x - x_0)^2 + y^2}{(x + x_0)^2 + y^2}\right) \quad (5.80)$$

la que representa la distribución de la cota piezométrica en un acuífero bidimensional. Utilizando la expresión (5.80) se puede evaluar la distribución de la velocidad de Darcy en las direcciones  $x$  e  $y$ , en el sector del acuífero real. Para eso se debe suponer que el acuífero es homogéneo e isotrópico para utilizar las siguientes expresiones:

$$v_x = -K \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.81)$$

**Figura 5.11**  
**Esgurrimiento desde una Fuente Lineal hacia un Pozo de Bombeo**



$$v_y = -K \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \quad (5.82)$$

El caudal total que capta el pozo de bombeo se puede calcular evaluando el aporte a lo largo de la fuente lineal. De esta manera, se puede utilizar la ley de Darcy para obtener la siguiente expresión:

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \Big|_{x=0} \cdot b \, dy \quad (5.83)$$

la que representa el aporte de agua hacia el pozo de bombeo desde la fuente longitudinal. Utilizando la expresión (5.81) se obtiene en forma más directa:

$$Q = -K \cdot b \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x=0} dy \quad (5.84)$$

Utilizando la expresión (5.80) se puede obtener:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{h_p - h_0}{Ln\left(\frac{r_p}{2 \cdot x_0}\right)} \cdot \frac{2 \cdot x_0}{x_0^2 + y^2} \quad (5.85)$$

Finalmente, al sustituir el resultado (5.85) en la ecuación (5.84) e integrar se obtiene:

$$Q = 2 \cdot p \cdot \frac{h_p - h_0}{Ln\left(\frac{r_p}{2 \cdot x_0}\right)} \quad (5.86)$$

Lo que representa el caudal captado por el pozo de bombeo, proveniente de la captación longitudinal.



## 6. INTEGRACION DE ECUACIONES SIMPLIFICADAS

En este enfoque de solución se plantea en forma simple relaciones que permitan definir líneas de flujo y equipotenciales para el problema específico que se desea estudiar. Este tipo de enfoque está restringido a situaciones muy simples en las cuales se tenga alguna idea del tipo de solución o forma del escurrimiento a través del medio poroso permeable.

### 6.1 Escurrimiento Unidireccional en un Acuífero Confinado

Este ejemplo fue analizado en la solución directa de la ecuación de Laplace. En este caso supondremos que las líneas de flujo son paralelas al estrato confinante, con lo cual se puede evaluar el caudal pasante a través de una sección cualquiera en el sistema acuífero utilizando la ley de Darcy:

$$Q = -K \cdot \frac{dh}{dx} \cdot b \quad (5.87)$$

donde  $K$  es la conductividad hidráulica del acuífero,  $b$  es el espesor de la formación acuífera, y  $Q$  es el caudal por unidad de ancho pasante a través del acuífero. La ecuación (5.87) puede ser integrada en forma directa para encontrar:

$$h(x) = -\frac{Q}{K \cdot b} \cdot x + c_1 \quad (5.88)$$

Al comparar esta ecuación con la encontrada a partir de la integración de la ecuación de Laplace (ecuación (5.38)) vemos que son similares. Para completar este análisis es necesario proveer una condición de borde adicional para determinar el valor de la constante de integración  $c_1$ .

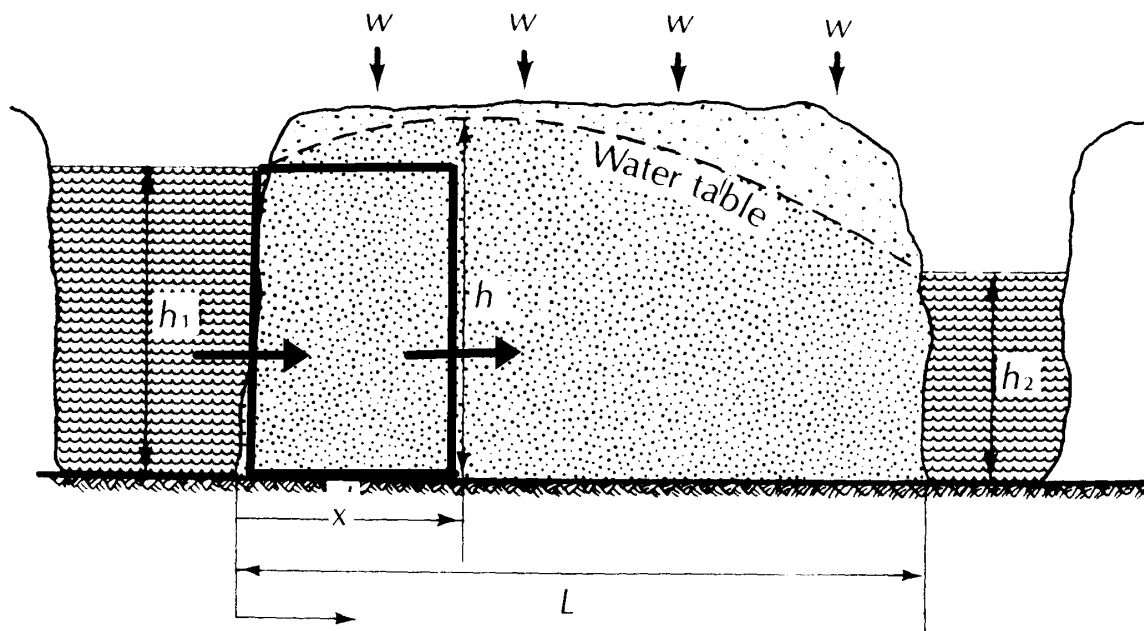
### 6.2 Escurrimiento Unidireccional en un Acuífero No Confinado con Recarga

En este caso se tiene la situación esquematizada en la Figura 5.12. En esta figura se muestra un acuífero no confinado limitado por dos cursos de agua que mantienen su nivel constante a través del tiempo. La situación de equilibrio de este sistema acuífero se completa con una recarga constante que se produce a través de la parte superior o techo del acuífero. Si consideramos un elemento de control de ancho  $x$ , el cual se encuentra localizado a la izquierda del acuífero, podemos escribir un balance de masa simplificado suponiendo que el curso de agua situado a la izquierda recarga al acuífero con una caudal por unidad de ancho constante e igual a  $q_0$ . De esta manera, podemos escribir:

$$q_0 + w \cdot x = -K \cdot h \cdot \frac{dh}{dx} \quad (5.89)$$

donde el primer término representa el efecto de la recarga desde el curso de agua, el segundo término es la recarga vertical dentro del elemento de control de ancho  $x$ . Finalmente, el tercer término (único del lado derecho) representa el caudal de salida desde el volumen de control. Para este último término hemos supuesto que las líneas de flujo son horizontales (equipotenciales son verticales) lo cual contradice el nivel freático supuesto que se ha dibujado en la Figura 5.12, el que presenta una importante grado de curvatura producto de la recarga. Esta aproximación se conoce comúnmente como Dupuit-Forcheimer.

**Figura 5.12**  
**Recarga Vertical sobre un Acuífero no Confinado**



donde el primer término representa el efecto de la recarga desde el curso de agua, el segundo término es la recarga vertical dentro del elemento de control de ancho  $x$ . Finalmente, el tercer término (único del lado derecho) representa el caudal de salida desde el volumen de control. Para este último término hemos supuesto que las líneas de flujo son horizontales (equipotenciales son verticales) lo cual contradice el nivel freático supuesto que se ha dibujado en la Figura 5.12, el que presenta una importante grado de curvatura producto de la recarga. Esta aproximación se conoce comúnmente como Dupuit-Forcheimer.

Si reordenamos los términos en la ecuación (5.89) obtenemos:

$$h \, dh = -\frac{q_0}{K} - \frac{w}{K} \cdot x \, dx \quad (5.90)$$

Si integramos esta ecuación obtenemos:

$$h^2 = -\frac{2 \cdot q_0}{K} \cdot x - \frac{w}{K} \cdot x^2 + c_1 \quad (5.91)$$

en donde  $q_0$  y  $c_1$  son constantes desconocidas. Para determinar ambos valores utilizamos las siguientes condiciones de borde:

$$h = h_1 \quad \text{en} \quad x = 0 \quad (5.92)$$

$$h = h_2 \quad \text{en} \quad x = L \quad (5.93)$$

con lo cual obtenemos la siguiente expresión:

$$h^2(x) = h_1^2 - \frac{(h_1^2 - h_2^2) \cdot x}{L} + \frac{w}{K} \cdot (L - x) \cdot x \quad (5.94)$$

que representa la variación de nivel freático con respecto a la distancia  $x$ . En forma simple es posible calcular el caudal pasante en una sección localizada a una distancia  $x$  desde el origen como:

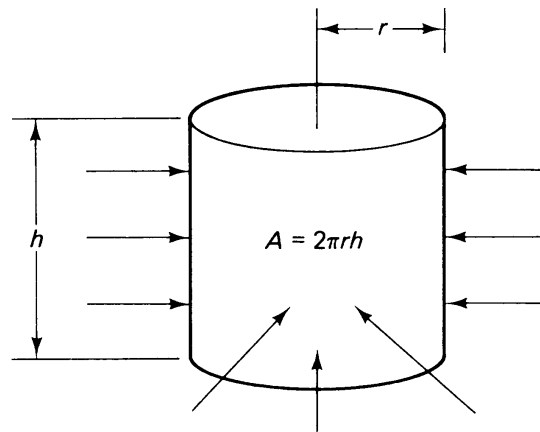
$$q_x(x) = \frac{K \cdot (h_1^2 - h_2^2)}{2 \cdot L} - w \cdot \left( \frac{L}{2} - x \right) \quad (5.95)$$

### 6.3 Ecurrimiento Radial hacia un Pozo de Bombeo en un Acuífero Confinado

En este caso se produce el escurrimiento hacia un pozo que se encuentra bombeando un caudal  $Q$  desde él. Las líneas de flujo son radiales y convergentes hacia el pozo. Las equipotenciales son círculos concéntricos como se muestra en la Figura 5.13. Utilizando la ley de Darcy podemos escribir:

$$Q = K \cdot i \cdot \Omega \quad (5.96)$$

**Figura 5.13**  
**Ecurrimiento Bidimensional Radial hacia un Pozo de Bombeo**



donde  $K$  es la conductividad hidráulica del medio acuífero,  $i$  es el gradiente hidráulico y  $\Omega$  es el área de escurrimiento. Para las condiciones del problema, el gradiente hidráulico y el área de escurrimiento se pueden escribir como:

$$i = \frac{dh}{dr} \quad (5.97)$$

$$\Omega = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot b \quad (5.98)$$

donde  $r$  es la distancia a una equipotencial, y  $b$  es el espesor del acuífero confinado. Al substituir los valores anteriores en la ecuación (5.96) obtenemos:

$$Q = K \cdot \frac{dh}{dr} \cdot 2 \cdot p \cdot r \cdot b \quad (5.99)$$

Esta ecuación se puede integrar en forma rápida para obtener:

$$h(r) = \frac{Q}{2 \cdot p \cdot K \cdot b} \cdot \ln(r) + c_1 \quad (5.100)$$

la cual tiene la misma forma que la ecuación (5.60) obtenida a partir de la solución de la ecuación de Laplace. Para determinar la constante  $c_1$  se debe tener una condición de borde. Si consideramos que la depresión en el pozo es tal que  $h=h_w$  a una distancia igual al radio del pozo,  $r_w$ , tenemos:

$$h(r) = \frac{Q}{2 \cdot p \cdot K \cdot b} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) + h_w \quad (5.101)$$

Si consideramos el concepto de radio de influencia, es decir aquella distancia desde el pozo de bombeo más allá de la cual no existe influencia o depresión de la napa debida al bombeo, podemos escribir:

$$Q = \frac{2 \cdot p \cdot K \cdot b \cdot (H - h_w)}{\ln\left(\frac{R}{r_w}\right)} \quad (5.102)$$

donde  $H$  es el espesor inicial de la napa libre y  $R$  es el radio de influencia del pozo.

#### 6.4 Ecurrimiento Radial hacia un Pozo de Bombeo en un Acuífero No Confinado

En este caso se produce el escurrimiento hacia un pozo que se encuentra bombeando un caudal  $Q$  desde él. Las líneas de flujo son radiales y convergentes hacia el pozo. Las equipotenciales son círculos concéntricos como se muestra en la Figura 5.13. En este análisis vamos a suponer que las líneas de flujo son radiales, rectas y horizontales (esto a pesar de la curvatura que se produce cerca de la ubicación del pozo de bombeo, ver Figura 5.14); las superficies equipotenciales son cilindros verticales concéntricos con el pozo (ver Figura 5.13) y se extrae un caudal constante,  $Q$ .

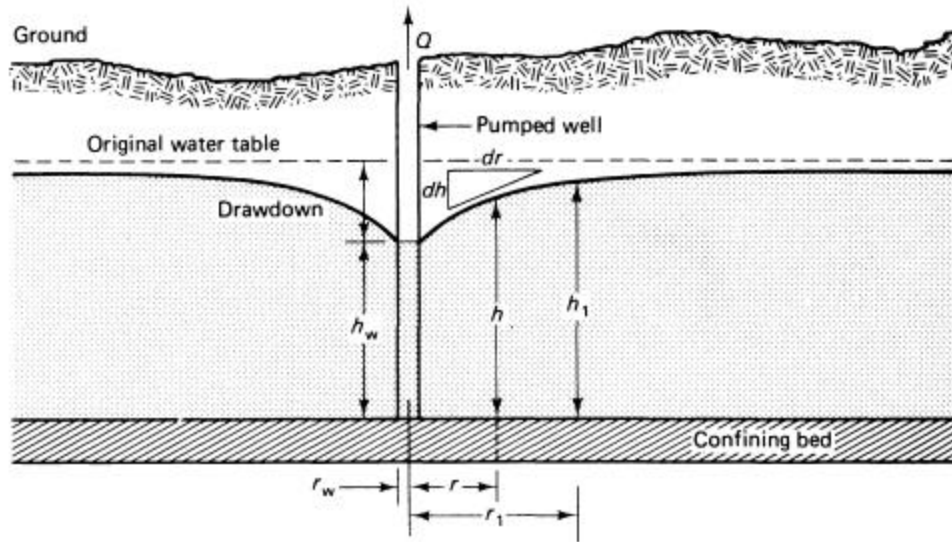
Utilizando la ley de Darcy podemos escribir:

$$Q = K \cdot i \cdot \Omega = K \cdot \frac{\partial h}{\partial r} \cdot h \cdot 2 \cdot p \cdot r \quad (5.103)$$

Reordenando la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{Q}{2 \cdot p \cdot K} \cdot \frac{dr}{r} = h \cdot dh \quad (5.104)$$

**Figura 5.14**  
**Escorrimiento hacia un Pozo de Bombeo en una Napa No Confinada**



Al integrar la ecuación anterior se puede escribir:

$$\frac{Q}{2 \cdot p \cdot K} \cdot \ln(r) = \frac{1}{2} \cdot h^2 + c_1 \quad (5.105)$$

Si introducimos la condición de borde que para  $r=r_w$  (radio del pozo) el nivel freático es  $h=h_w$ , podemos escribir:

$$h^2(r) = \frac{Q}{p \cdot K} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) + h_w^2 \quad (5.106)$$

Si consideramos nuevamente el concepto de radio de podemos escribir:

$$Q = \frac{p \cdot K \cdot (H^2 - h_w^2)}{\ln\left(\frac{R}{r_w}\right)} \quad (5.107)$$

donde  $H$  es el espesor inicial de la napa libre y  $R$  es el radio de influencia del pozo. La expresión anterior se puede escribir también como:

$$Q = \frac{p \cdot K \cdot (H - h_w) \cdot (H + h_w)}{\ln\left(\frac{R}{r_w}\right)} \quad (5.108)$$

Si el espesor inicial de la napa saturada,  $H$ , es muy grande comparado con las depresiones que se experimentan cerca del pozo de bombeo podemos escribir aproximadamente que  $H + h_w \approx 2 \cdot H$ , con lo cual la ecuación (5.108) se modifica como sigue:

$$Q = \frac{2 \cdot p \cdot K \cdot H \cdot (H - h_w)}{\ln\left(\frac{R}{r_w}\right)} \quad (5.109)$$

la que es similar a la encontrada para un acuífero confinado, pero en este caso el espesor del acuífero es igual al espesor saturado  $H$ .

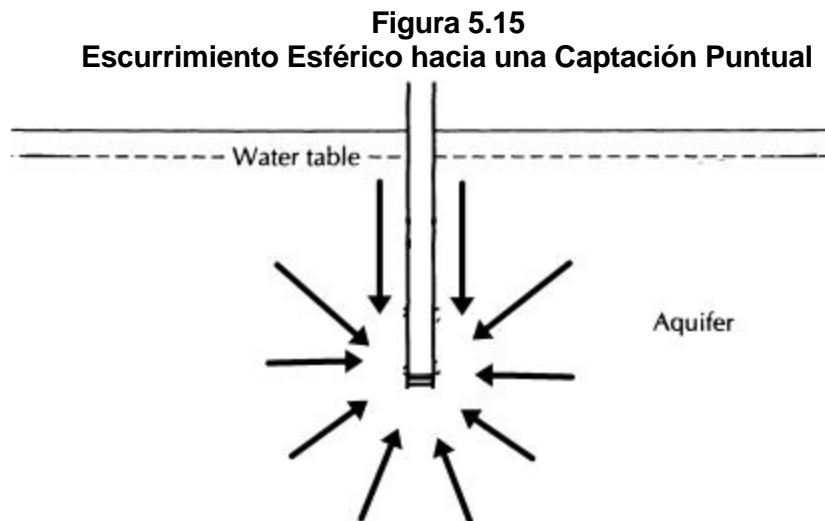
### 6.5 Esgurrimiento Esférico hacia una Captación Puntual

En este caso se considera que el pozo capta únicamente a través del fondo de éste y que el relleno acuífero es muy profundo. El bombeo es suficientemente débil como para que no se note la influencia de éste sobre la superficie de la napa (ver Figura 5.15).

Si aceptamos las condiciones anteriores, podemos suponer que las líneas de flujo son aproximadamente radiales que convergen hacia la captación, y que las superficies equipotenciales son esféricas y concéntricas.

Utilizando la ley de Darcy podemos escribir:

$$Q = K \cdot i \cdot \Omega = K \cdot \frac{\partial h}{\partial r} \cdot 4 \cdot p \cdot r^2 \quad (5.110)$$



Reordenando la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{Q}{4 \cdot p \cdot K} \cdot \frac{dr}{r^2} = dh \quad (5.111)$$

la cual luego de ser integrada nos permite escribir:

$$-\frac{Q}{4 \cdot p \cdot K} \cdot \frac{1}{r} = h + c_1 \quad (5.112)$$

Si introducimos la condición de borde que para  $r=r_w$  (radio del pozo) el nivel freático es  $h=h_w$ , podemos escribir:

$$h(r) = \frac{Q}{4 \cdot p \cdot K} \cdot \left( \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r} \right) + h_w \quad (5.113)$$

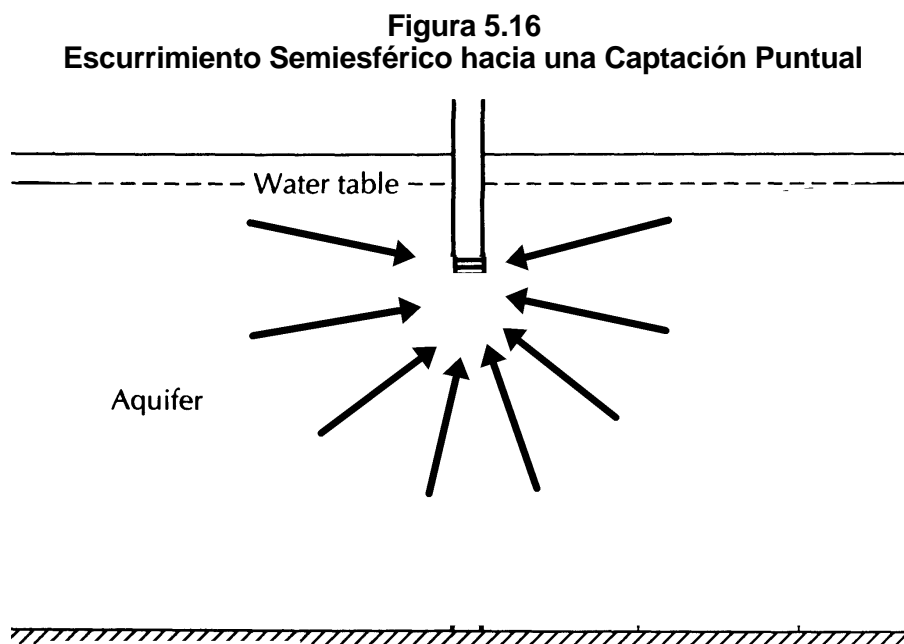
Si utilizamos el concepto de radio de influencia podemos escribir:

$$Q = \frac{4 \cdot p \cdot K \cdot (H - h_w)}{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{R}} \quad (5.114)$$

Finalmente, aceptando que el radio de influencia  $R$  es mucho mayor que el radio del pozo, i.e.  $R \gg r_w$  se tendría:

$$Q = 4 \cdot p \cdot K \cdot r_w \cdot (H - h_w) \quad (5.115)$$

En la práctica es común tener pozos de pequeña profundidad que captan sólo por el fondo. Para estos casos el escurrimiento puede considerarse como semiesférico, con lo cual las ecuaciones anteriores se modifican ligeramente, ya que el área de una semiesfera es  $2 \cdot p \cdot r^2$  en vez de  $4 \cdot p \cdot r^2$  para una esfera (ver Figura 5.16).



En el caso de un escurrimiento semiesférico, las ecuaciones (5.113), (5.114) y (5.115) se modifican de la siguiente manera:

$$h(r) = \frac{Q}{2 \cdot p \cdot K} \cdot \left( \frac{1}{r_w} - \frac{1}{r} \right) + h_w \quad (5.116)$$

$$Q = \frac{2 \cdot p \cdot K \cdot (H - h_w)}{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{R}} \quad (5.117)$$

$$Q = 2 \cdot p \cdot K \cdot r_w \cdot (H - h_w) \quad (5.118)$$

## 6.6 Interacción entre un Pozo de Bombeo y Flujo Natural de la Napa

En esta situación se tiene un pozo de bombeo que está funcionando en un sistema acuífero que presenta un flujo o escurrimiento natural, lo que se ilustra en la Figura 5.17. Para resolver este problema utilizaremos superposición de las líneas de corriente o flujo generadas por el pozo y por el flujo natural.

Para comenzar el análisis definamos  $u_0$  como la velocidad de Darcy del flujo natural,  $K$  es la conductividad hidráulica del sistema acuífero confinado y  $b$  es su espesor. Definamos un sistema de coordenadas (x,y) cuyo origen está situado en la ubicación del pozo de bombeo. A partir del esquema de la Figura 5.17 podemos escribir para la velocidad en el punto P, en las direcciones x e y las siguientes expresiones:

$$v_x = -u_0 - v_R \cdot \cos(q) = \frac{dx}{dt} \quad (5.119)$$

$$v_y = -v_R \cdot \sin(q) = \frac{dy}{dt} \quad (5.120)$$

donde  $v_R$  es la velocidad inducida por la presencia del pozo de bombeo en el punto P de coordenadas (x,y), la cual se puede escribir como:

$$v_R = \frac{Q}{2 \cdot p \cdot R \cdot b} \quad (5.121)$$

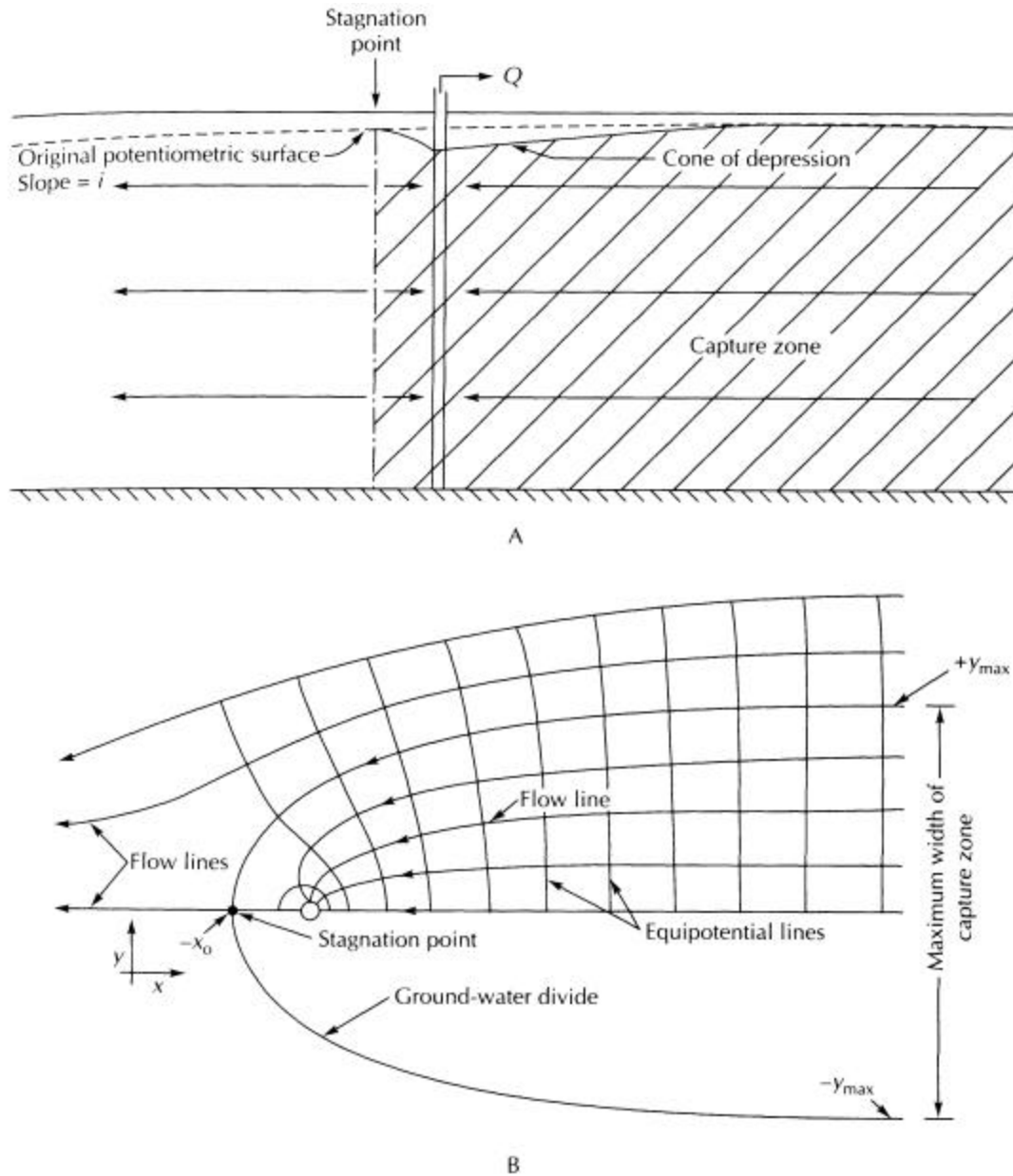
donde  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Dividiendo las expresiones de las ecuaciones (5.119) y (5.120) se obtiene:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u_0}{v_R \cdot \sin(q)} + \frac{\cos(q)}{\sin(q)} \quad (5.122)$$



**Figura 5.17**  
**Zona de Captura de un Pozo de Bombeo**



Debido a la definición de nuestro sistema de coordenadas podemos escribir para el seno y coseno del ángulo  $\theta$  las siguientes expresiones:

$$\text{sen}(\mathbf{q}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (5.123)$$

$$\text{cos}(\mathbf{q}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (5.124)$$

Al substituir ecuaciones (5.121), (5.123) y (5.124) en (5.122) obtenemos:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2 \cdot p \cdot b \cdot u_0}{Q} \cdot \frac{x^2 + y^2}{y} + \frac{x}{y} \quad (5.125)$$

lo que representa la ecuación de las trayectorias de las líneas de corriente de este escurrimiento bidimensional. Utilicemos para el resto de este análisis una expresión un poco más reducida:

$$\frac{dx}{dy} = C \cdot \frac{x^2 + y^2}{y} + \frac{x}{y} \quad (5.126)$$

donde C es una constante igual a  $C = \frac{2 \cdot p \cdot b \cdot u_0}{Q}$ . Si reordenamos la expresión anterior obtenemos:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y^2} = \frac{d(x/y)}{dy} = C \cdot \frac{x^2 + y^2}{y^2} \quad (5.127)$$

la cual puede ser reordenada para obtener:

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{d(x/y)}{dy} = - \left( 1 + \left( \frac{x}{y} \right)^2 \right) \quad (5.128)$$

Esta última ecuación puede ser en forma muy simple con lo cual obtenemos:

$$\frac{1}{C} \cdot \tan^{-1}(x/y) = y + c_2 \quad (5.129)$$

donde  $c_2$  es una constante de integración. Si reordenamos esta expresión obtenemos:

$$x = y \cdot \tan(C \cdot (y + c_2)) \quad (5.130)$$

Para evaluar la constante  $c_2$  debemos considerar que existe una zona de captura a la cual todo el caudal extraído desde el pozo de bombeo es llevado mediante el flujo propio de la napa. De esta manera, si consideramos sólo el lado positivo del eje y, el ancho total de esta zona de captura es:

$$y_{MAX} = \frac{Q}{2 \cdot b \cdot u_0} \quad (5.131)$$

con lo cual la ecuación que describe la trayectoria de una partícula de fluido que es capturada por el pozo de bombeo es la siguiente:

$$x = y \cdot \tan \left( \frac{2 \cdot p \cdot b \cdot u_0}{Q} \cdot \left( y - \frac{Q}{4 \cdot b \cdot u_0} \right) \right) \quad (5.132)$$

Esta última ecuación representa la ubicación de la envolvente a la denominada zona de captura de un pozo de bombeo.

La distancia desde la ubicación del pozo de bombeo hasta el punto de detención o de velocidad nula está dada por la siguiente expresión:

$$x_0 = -\frac{Q}{2 \cdot p \cdot b \cdot u_0} \quad (5.133)$$

## 6.7 Intrusión Salina en Acuíferos Costeros

Acuíferos costeros entran en contacto con el océano en las cercanías de la línea de costa y aquí, bajo condiciones naturales, agua dulce es descargada en el océano. Debido al aumento de la demanda por agua subterránea en áreas costeras, el flujo de agua dulce descargado hacia el mar ha ido decreciendo paulatinamente, lo que ha causado la incorporación de agua salada a los acuíferos, en un fenómeno que se conoce como intrusión salina.

A comienzos del siglo XX dos investigadores europeos encontraron que en las zonas costeras el agua salada se encuentra bajo el suelo no a nivel del mar sino a una profundidad cercana a 40 veces la altura del agua dulce sobre el nivel del mar. Esta distribución fue atribuida al equilibrio hidrostático que existe entre los dos fluidos (agua dulce y de mar) de distintas densidades. La expresión derivada para explicar este fenómeno se conoce comúnmente como relación de Ghyben-Herzberg.

Consideremos un corte vertical de un acuífero no confinado o libre como el indicado en la Figura 5.18. La presión hidrostática total en el punto A es igual a:

$$p_A = \mathbf{r}_s \cdot g \cdot h_s \quad (5.134)$$

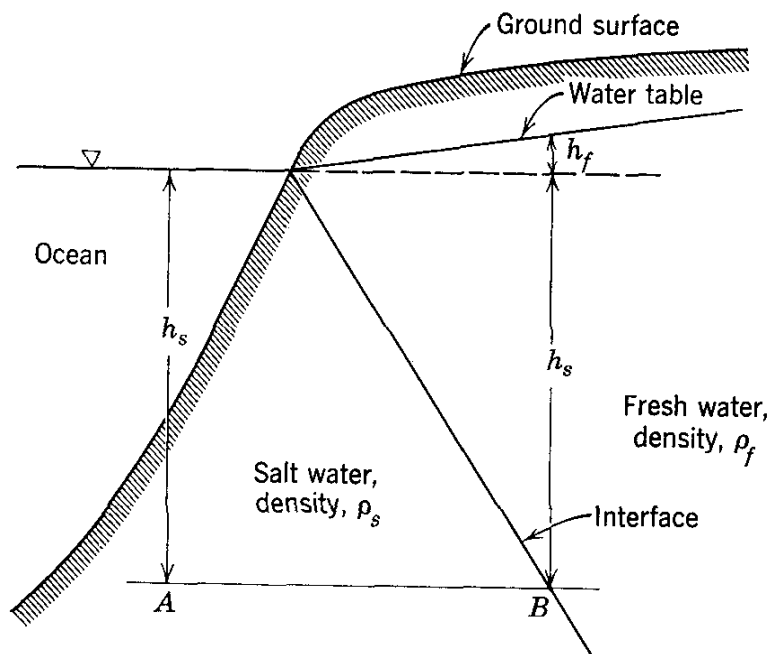
donde  $\mathbf{r}_s$  es la densidad del agua salada,  $g$  es la aceleración de gravedad, y  $h_s$  es la altura indicada en la Figura 5.18. En forma similar, la presión total en B, la que está localizada en la misma posición vertical que A, pero en la zona de agua dulce se tiene:

$$p_B = \mathbf{r}_f \cdot g \cdot h_f + \mathbf{r}_f \cdot g \cdot h_s \quad (5.135)$$

donde  $\mathbf{r}_f$  es la densidad del agua dulce y  $h_f$  es la altura indicada en la Figura 5.18. Para que en la interfase se tenga una situación de equilibrio la presión en A y B debe ser igual, los que da origen a la expresión de Ghyben-Herzberg:

$$h_s = \frac{\mathbf{r}_f}{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_f} \cdot h_f = \mathbf{b} \cdot h_f \quad (5.136)$$

**Figura 5.18**  
**Corte Vertical Acuífero Costero**



Tomando valores característicos para las densidades del agua dulce y salada ( $\rho_s = 1025 \text{ g/cm}^3$  y  $\rho_f = 1000 \text{ g/cm}^3$ ) se llega a:

$$h_s = 40 \cdot h_f \quad (5.137)$$

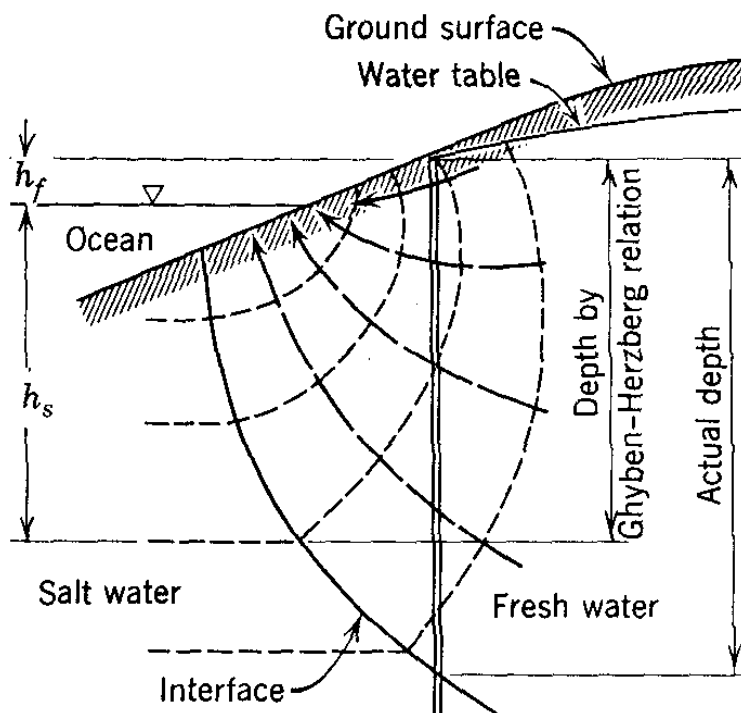
Estudios realizados desde las investigaciones originales han permitido identificar las limitaciones y simplificaciones realizadas en la derivación de la ecuación (5.136). Algunos de estos aspectos se indican a continuación:

- Intrusión salina está limitada por la longitud del acuífero y la elevación del nivel freático.
- Equilibrio hidrostático implica que no existe flujo, lo que en general no es cierto.

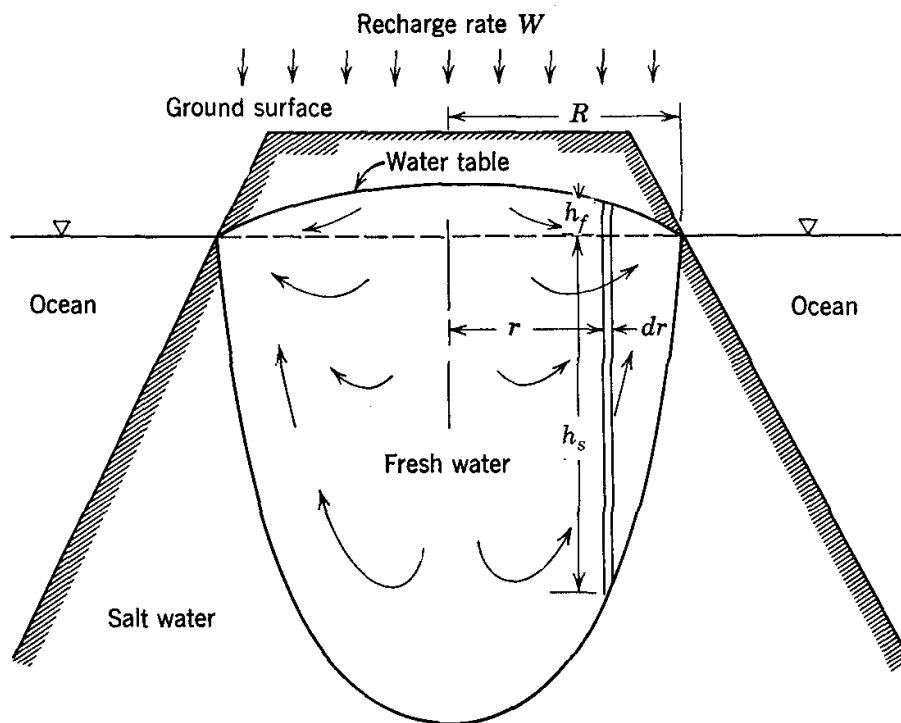
Una representación más realista de intrusión salina se presenta en la Figura 5.19 con la ayuda de un Red de Flujo compuesta por líneas de flujo y equipotenciales. En este caso se observa que dado que las equipotenciales y líneas de flujo son curvas (la curvatura dependerá de la cantidad de agua subterránea que se descarga hacia el mar) la profundidad indicada por la relación de Ghyben-Herzberg es siempre menor que la realmente existente. En el caso de flujos pequeños (gradientes menores) esta discrepancia es también menor.

Utilicemos la relación de Ghyben-Herzberg para estudiar el caso de islas oceánicas, cuyos acuíferos son relativamente permeables, y consisten de arena, lava, coral y limo, de tal manera que el agua de mar está en contacto con el agua subterránea por todos sus extremos. Debido a que el agua subterránea es abastecida únicamente por agua de lluvia, sólo un monto limitado está disponible. La Figura 5.20 muestra la presencia de un lente de agua dulce que se forma por el movimiento de agua subterránea dulce hacia la costa.

**Figura 5.19**  
**Red de Flujo en Zona de Contacto Acuífero Costa**



**Figura 5.20**  
**Estructura de Flujo en Isla**



A partir de los supuestos de Dupuit y la relación de Ghyben-Herzberg es posible encontrar una expresión para describir en forma aproximada la forma del contacto agua dulce con el agua salada. Para lo anterior, supongamos una isla circular de radio  $R$ , la que recibe una recarga efectiva de monto  $W$ . La formación acuífera es homogénea de permeabilidad  $K$ . Utilizando el volumen de control indicado en la Figura 5.20 y la ley de Darcy se obtiene:

$$W \cdot \mathbf{p} \cdot r^2 = -K \cdot 2 \cdot \mathbf{p} \cdot r \cdot \frac{\partial h_F}{\partial r} \cdot (h_F + h_s) \quad (5.138)$$

Substituyendo la expresión de Ghyben-Herzberg podemos escribir la ecuación anterior en función de una única variables de estado:

$$W \cdot \mathbf{p} \cdot r^2 = -K \cdot 2 \cdot \mathbf{p} \cdot r \cdot \frac{\partial h_F}{\partial r} \cdot (1 + \mathbf{b}) \cdot h_F \quad (5.139)$$

Reordenando se obtiene:

$$\frac{W}{2 \cdot (1 + \mathbf{b})} \cdot r \, dr = -h_F \, dh_F \quad (5.140)$$

la cual puede ser integrada para obtener:

$$\frac{W}{2 \cdot (1 + \mathbf{b})} \cdot r^2 = -h_F^2 + constante \quad (5.141)$$

Para evaluar la constante podemos considerar que en  $r=R$  se tiene que  $h_F=0$ , con lo que finalmente se obtiene:

$$h_F^2 = \frac{W}{2 \cdot K \cdot (1 + \mathbf{b})} \cdot (R^2 - r^2) \quad (5.142)$$

Si utilizamos la relación de Ghyben-Herzberg es posible encontrar la misma relación anterior pero para la altura del agua de mar:

$$h_s^2 = \frac{W \cdot \mathbf{b}^2}{2 \cdot K \cdot (1 + \mathbf{b})} \cdot (R^2 - r^2) \quad (5.143)$$

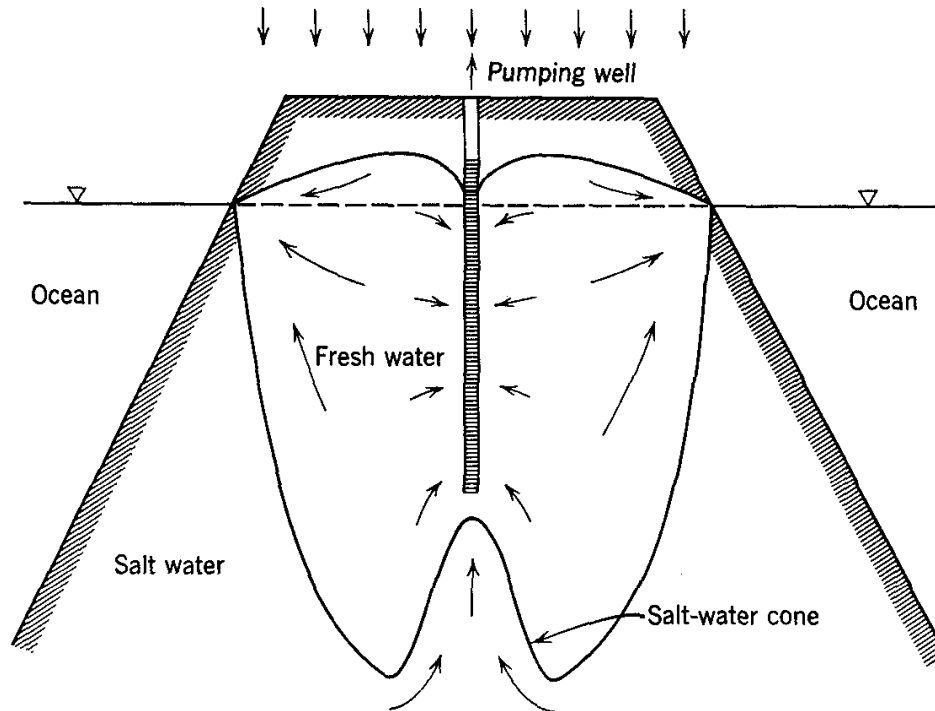
De esta manera, la profundidad del agua salada en cualquier posición dentro de la isla es función de la recarga por lluvia, el tamaño de la isla y la permeabilidad de la formación acuífera representativa.

Este mismo problema puede ser analizado en mayor detalle incorporando un pozo de bombeo en la zona central del sistema acuífero, el cual se encuentra extrayendo un caudal igual a  $Q$ . El descenso de nivel causado por este pozo de bombeo puede ser visualizado en la Figura 5.21. En este caso, el descenso de nivel causado por el pozo se traduce en una elevación den la interfase que separa el agua salada del agua dulce. Utilizando un esquema de balance de masa similar al aplicado en el caso anterior se obtiene para las alturas de agua dulce y salada:

$$h_F^2 = \frac{W}{2 \cdot K \cdot (1+b)} \cdot (R^2 - r^2) + \frac{Q}{p \cdot K \cdot (1+b)} \cdot \text{Log}\left(\frac{r}{R}\right) \quad (5.144)$$

$$h_F^2 = \frac{W \cdot b^2}{2 \cdot K \cdot (1+b)} \cdot (R^2 - r^2) + \frac{Q \cdot b^2}{p \cdot K \cdot (1+b)} \cdot \text{Log}\left(\frac{r}{R}\right) \quad (5.145)$$

**Figura 5.21**  
**Estructura de Flujo en Isla con Pozo de Bombeo**



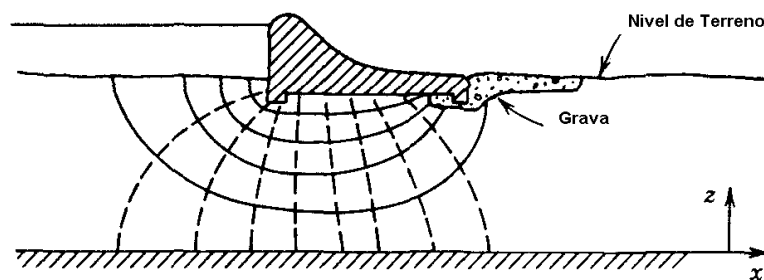
## 7. REDES DE FLUJO

### 7.1 Aspectos Generales

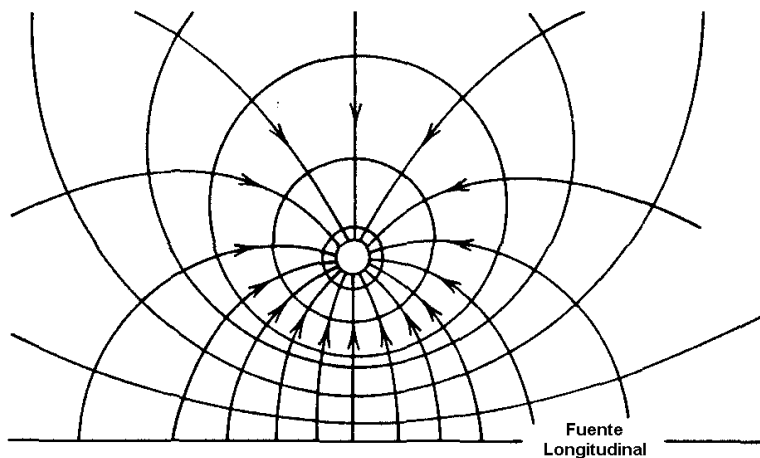
Dada su característica de flujo laminar e irrotacional, un sistema de aguas subterráneas puede ser representado en tres dimensiones por medio de un conjunto de superficies equipotenciales y un conjunto de líneas de flujo ortogonales. En aquellos casos en que es posible identificar una sección bidimensional representativa del problema en estudio el conjunto de equipotenciales y líneas de flujo constituye una Red de Flujo. Dos ejemplos de redes de flujo, para el caso de un escurrimiento de agua subterránea bajo un muro de embalse impermeable y en un sistema acuífero afectado por la extracción desde un pozo de bombeo, se presentan en la Figura 5.22.

La construcción de una Red de Flujo es una de las herramientas de análisis más poderosas que se ha utilizado históricamente en el área de hidráulica de aguas subterráneas. En este capítulo se presentan aspectos teóricos generales, así como un desarrollo más aplicado de redes de flujo al problema de escurrimiento en medios porosos permeables.

**Figura 5.22**  
**Ejemplos de Redes de Flujo. (a) Flujo bajo barrera de tierra, (b) Flujo hacia pozo abastecido por fuente longitudinal**



(a)



(b)



## 7.2 Líneas de Flujo

Si consideramos un escurrimiento bidimensional o plano en el que la componente vertical de la velocidad es igual a cero ( $v_z = 0$ ), podemos escribir la ecuación de conservación de masa en régimen permanente de la forma siguiente:

$$\nabla \bullet \underline{v} = 0 \quad (5.146)$$

donde  $\bullet$  representa el producto punto. Si reemplazamos las componentes del vector velocidad ( $v_x$  y  $v_y$ ) en la ecuación (5.146) se obtiene:

$$\nabla \bullet \underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (5.147)$$

de donde:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (5.148)$$

Lo anterior permite considerar que las componentes del vector velocidad,  $\underline{v}$ , provienen de una misma función,  $\psi(x, y)$ , y quedan dadas por:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (5.149a)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.149b)$$

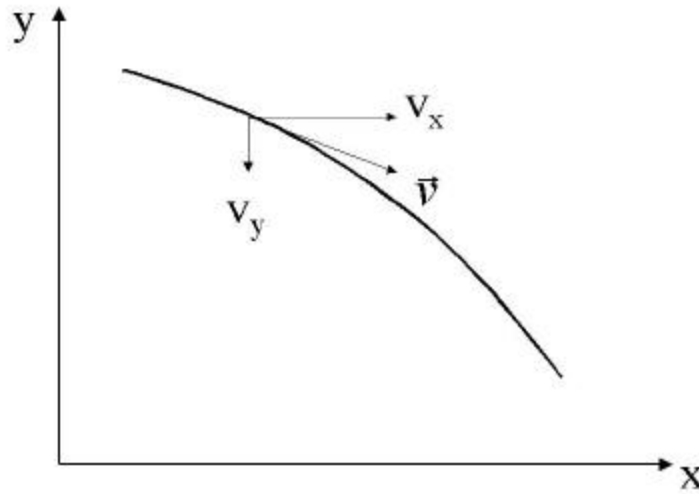
Tomando la derivada parcial con respecto a  $x$  e  $y$ , de las ecuaciones (5.149a) y (5.149b), respectivamente, se obtiene:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (5.150a)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \quad (5.150b)$$

Pero, dado que las segundas derivadas son simétricas se tiene que la función  $\psi(x, y)$  satisface la ecuación de continuidad (5.147). Por definición vamos a considerar como líneas de flujo a aquellas líneas que en todos sus puntos son tangentes al vector velocidad (ver Figura 5.23). Teniendo en cuenta esta condición, la ecuación diferencial para todas las líneas de flujo es:

**Figura 5.23**  
**Esquema de una Línea de Flujo**



$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = m \quad (5.151)$$

donde  $m$  es la pendiente de las líneas de flujo, con lo cual:

$$v_x \cdot dy - v_y \cdot dx = 0 \quad (5.152)$$

Reemplazando  $v_x$  y  $v_y$  en (5.152) obtenemos:

$$\frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial y}{\partial y} \cdot dy = dy = 0 \quad (5.153)$$

Dado que la última expresión nos muestra el diferencial total de  $y$ , podemos escribir:

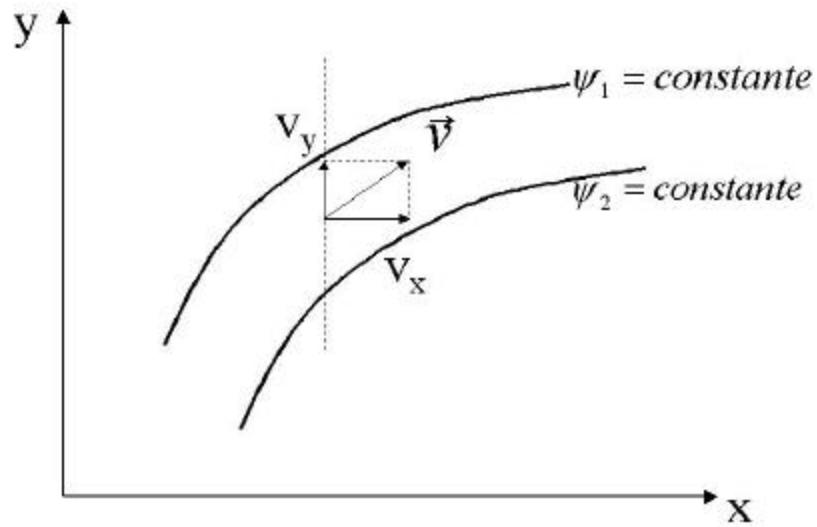
$$y(x, y) = \text{constante} \quad (5.154)$$

lo que representa la ecuación de una línea de flujo.

### 7.3 Caudal que circula entre líneas de flujo

Como el escurrimiento se ha supuesto permanente y la velocidad debe guardar una dirección invariable en cada punto de coordenadas  $(x, y)$  las líneas de flujo se confunden con la trayectoria de los filetes líquidos y permanecen fijas en el plano. Consideremos, de acuerdo a la Figura 5.24, un tubo de corriente comprendido entre dos planos paralelos al plano  $x-y$ , separados por una distancia unitaria, y limitado por las líneas de flujo  $y_1$  y  $y_2$ . El caudal,  $q$ , que escurre por este tubo de flujo puede ser determinado a partir de un análisis infinitesimal, en el cual se tiene:

**Figura 5.24**  
**Escorrimento entre Líneas de Flujo**



$$dq = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (5.155)$$

y el caudal total se puede escribir como:

$$q = \int_{y_1}^{y_2} dq \quad (5.156)$$

El vector velocidad puede ser expresado en el plano cartesiano como:

$$\bar{\mathbf{v}} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} \quad (5.157)$$

y el vector,  $\hat{\mathbf{n}}$ , normal al área de escurrimiento como:

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos \mathbf{a} \hat{\mathbf{i}} + \sin \mathbf{a} \hat{\mathbf{j}} \quad (5.158)$$

en donde:

$$\cos \mathbf{a} = \frac{dy}{ds} \quad \text{y} \quad \sin \mathbf{a} = -\frac{dx}{ds} \quad (5.159)$$

Substituyendo (5.157), (5.158) y (5.159) en la ecuación (5.155) se obtiene secuencialmente:

$$dq = (v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}}) \cdot \left( \frac{dy}{ds} \hat{\mathbf{i}} - \frac{dx}{ds} \hat{\mathbf{j}} \right) ds \quad (5.160)$$

$$dq = v_x \, dy - v_y \, dx \quad (5.161)$$

$$dq = \frac{\partial y}{\partial y} \cdot dy - \left( -\frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot dx \quad (5.162)$$

Finalmente se puede escribir:

$$dq = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial y} dy = dy \quad (5.163)$$

Substituyendo el resultado de la ecuación (5.163) en la definición dada por la ecuación (5.156) se obtiene:

$$q = \int_{y_1}^{y_2} dq = \int_{y_1}^{y_2} dy = y_2 - y_1 \quad (5.164)$$

Es decir, el caudal total que escurre entre dos líneas de flujo cualquiera de un escurrimiento es igual a la diferencia entre sus respectivos valores de la función  $y(x, y)$ .

#### 7.4 Líneas equipotenciales

Si el sistema acuífero es homogéneo e isotrópico podemos definir la función  $f(x, y)$  como el potencial de velocidades:

$$f = K \cdot h \quad (5.165)$$

donde  $K$  es la conductividad hidráulica y  $h$  es la cota piezométrica en un punto cualquiera. Esta función posee las siguientes características:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = K \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = v_x \quad (5.166a)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = K \cdot \frac{\partial h}{\partial y} = v_y \quad (5.166b)$$

La ecuación para una línea equipotencial se obtiene cuando  $f(x, y)$  es constante o cuando  $df=0$ ,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad (5.167)$$

Substituyendo las definiciones entregadas en (5.166a) y (5.166b) se tiene:

$$df = v_x dx + v_y dy = 0 \quad (5.168)$$

Lo que permite escribir:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y} \quad (5.169)$$

Si comparamos las ecuaciones (5.151) y (5.169) observamos que para el caso de la función potencial  $f(x, y)$  se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{m} \quad (5.170)$$

donde  $m$  es la pendiente de las líneas de flujo. La ecuación (5.170) nos indica que  $y$  y  $f$  son dos familias de funciones mutuamente perpendiculares.

Finalmente podemos observar que:  $y(x, y)$  y  $f(x, y)$  son soluciones de la ecuación de Laplace, ie.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (5.171a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (5.171b)$$

con lo que se concluye que las funciones  $f(x, y)$  y  $y(x, y)$  son armónicas.

## 7.5 Redes de Flujo

Consideremos un tubo de corriente, como el de la Figura 5.25, definido por dos líneas de corriente 1-1 y 3-3 situadas en un mismo plano paralelo al plano de movimiento, y las 2-2 y 4-4 situadas en un plano paralelo a la distancia  $b$  (escurrimiento bidimensional). Sean además las equipotenciales  $h_0, h_1, h_2$ , situadas a distancias  $l_1$  y  $l_2$  entre sí. El agua entre estas cuatro líneas se comporta esencialmente como si circulara por una cañería limitada por ellas.

Sean dos secciones de áreas  $A_1$  y  $A_2$  en cuyas ubicaciones los gradientes hidráulicos del escurrimiento son  $i_1$  y  $i_2$ . Por continuidad de caudales se tiene, para un medio permeable uniforme:

$$Q = K \cdot A_1 \cdot i_1 = K \cdot A_2 \cdot i_2 \quad (5.172)$$

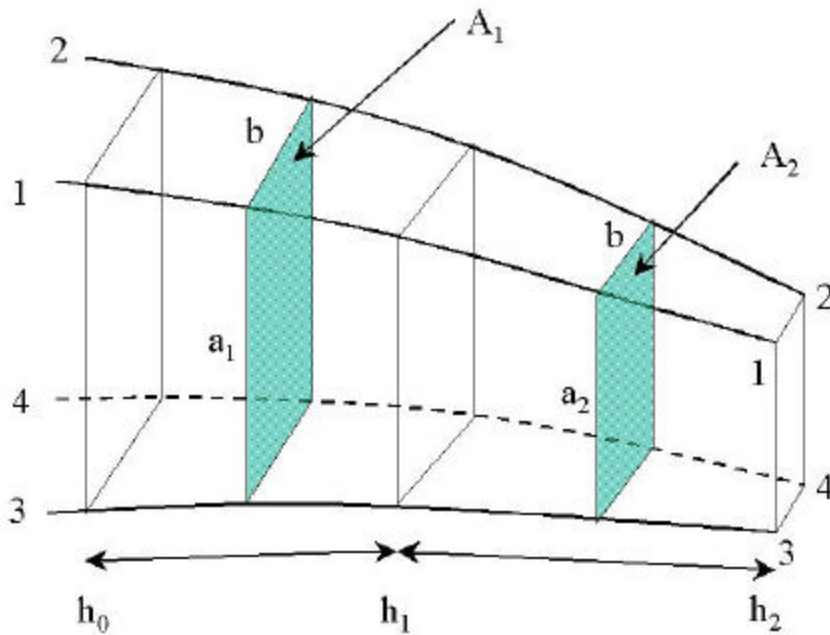
donde los gradientes hidráulicos en los tramos 0-1 y 1-2 se pueden escribir como:

$$i_1 = \frac{h_0 - h_1}{l_1} \quad y \quad i_2 = \frac{h_1 - h_2}{l_2}$$

con las áreas de escurrimiento iguales a:

$$A_1 = a_1 \cdot b \quad y \quad A_2 = a_2 \cdot b$$

**Figura 5.25**  
**Tubo de Corriente**



Si se opta por trazar las equipotenciales de tal manera que la pérdida de carga entre dos consecutivas sea igual, la ecuación (5.172) permite escribir:

$$\frac{\Delta h}{l_1} \cdot a_1 \cdot b = \frac{\Delta h}{l_2} \cdot a_2 \cdot b \quad (5.173)$$

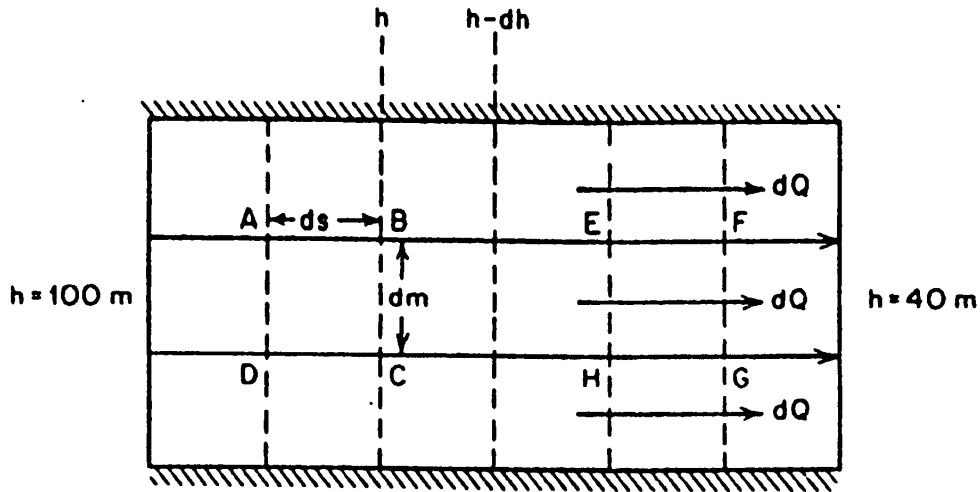
con lo que se obtiene finalmente:

$$\frac{a_1}{l_1} = \frac{a_2}{l_2} = \text{constante} \quad (5.174)$$

Esto significa que la relación de los lados de los rectángulos de una red de flujo, formados por la intersección de líneas de corriente y equipotenciales, es constante. De este modo, si un elemento de la red de flujo es aproximadamente cuadrado,  $a_1 \approx l_1$ , todos los demás también lo serán. Esto proporciona un método de gran utilidad para la solución de algunos problemas de escurrimientos en medios permeables saturados. Se traza por tanteo una red, a partir de las condiciones de borde del problema específico, y se procura trazar líneas de flujo y equipotenciales que formen cuadrados entre sí. Debe usarse sin temor mucho lápiz y mucha goma. Lo fundamental para la aplicación de este método es que las condiciones de borde sean bien definidas y tales que permitan dar una idea general de la forma de las líneas de flujo.

Consideremos el ejemplo indicado en la Figura 5.26, en el cual se observan tres tubos de flujo y seis caídas de presión. En este caso supongamos que  $ds=dm$ .

**Figura 5.26**  
**Ejemplo de Red de Flujo**



Si la red se ha trazado con el objeto de determinar el monto de una filtración, una vez dibujada, se determina el valor " $Dh$ " dividiendo la carga total disponible por el número de caídas de presión ( $N_p$ ). El caudal conducido por cada tubo de flujo será:

$$dq = \frac{\Delta h}{l_1} \cdot K \cdot a_1 = \Delta h \cdot K \quad \text{con} \quad \Delta h = \frac{H}{N_p} = \frac{100 - 40}{6} \text{ m} = 10 \text{ m} \quad (5.175)$$

El caudal total queda dado por:  $Q = dq \cdot N_t$  (por unidad de ancho), donde  $N_t$  es el número de tubos de flujo en la red trazada.

$$Q = K \cdot H \cdot \frac{N_t}{N_p} \quad (5.176)$$

Se observa que si el material es uniforme, la red es la misma cualquiera que sea su permeabilidad, a condición de que se mantengan las condiciones de borde. El trazado de la red resulta ser independiente de la permeabilidad del terreno.

## 7.6 Ecurrimientos en materiales con permeabilidad diferentes

Si las ecuaciones anteriores se modifican ((5.172) y (5.173)) se puede escribir la siguiente relación:

$$\frac{K_1 \cdot a_1}{l_1} = \frac{K_2 \cdot a_2}{l_2} \quad (5.177)$$

Si el suelo más permeable tiene un coeficiente de permeabilidad  $K_1$ , y hemos comenzado por esta zona a trazar la red de flujo como un sistema de cuadrados,  $a_1 = l_1$ , se tendrá:

$$\frac{a_2}{l_2} = \frac{K_1}{K_2} \quad (5.178)$$

O sea que en la zona menos permeable,  $K_2 < K_1$ , la red consistirá en un sistema de rectángulos cuya relación de lados ( $a_2/l_2$ ) es igual a  $K_1/K_2$ .

### 7.7 Caso en que las permeabilidades vertical y horizontal son diferentes

Si la permeabilidad horizontal del medio poroso,  $K_h$ , es diferente de aquella en dirección vertical,  $K_v$ , antes de trazar la red se debe distorsionar la escala horizontal de la figura multiplicándola por la expresión:

$$\sqrt{\frac{K_v}{K_h}}$$

Para demostrar esta relación recordemos que la ecuación de Laplace puede escribirse en este caso como:

$$K_h \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + K_v \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (5.179)$$

Definamos una nueva variable  $x' = ax$  (cambio de escala horizontal) con  $a$  constante. Puede escribirse:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x'} \cdot a \quad (5.180a)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x'^2} \cdot a^2 \quad (5.180b)$$

Reemplazando las expresiones en la ecuación de Laplace, se tiene:

$$a^2 \cdot K_h \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x'^2} + K_v \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (5.181)$$

Eligiendo “ $a$ ” de modo que se tenga:

$$a^2 \cdot \frac{K_h}{K_v} = 1 \quad (5.182)$$

La ecuación de Laplace se reduce a:

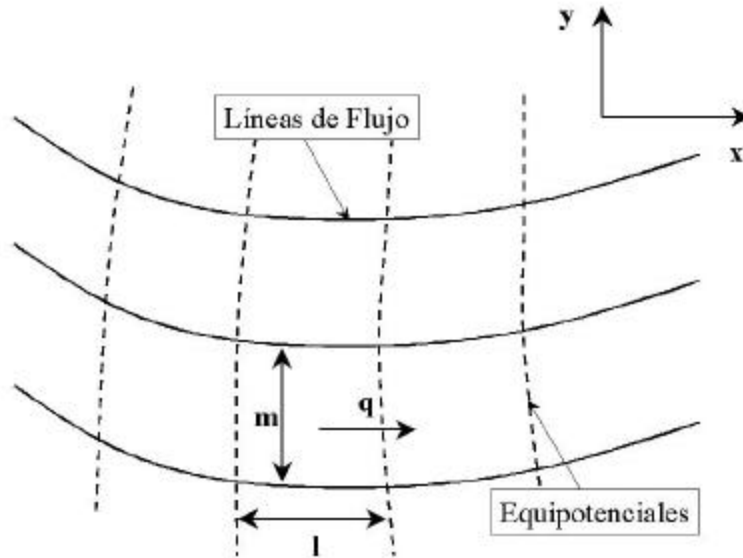
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (5.183)$$

Esto significa que en el medio de ejes  $x'$  e  $y$  es válido el procedimiento normal de trazado de la red de flujo. Una vez trazada la red de acuerdo con el procedimiento descrito, se forman cuadrado con líneas de flujo y equipotenciales, se vuelve la figura y la red a la escala natural. En estas condiciones, el caudal de filtración queda dado en la siguiente forma. Se elige un



tramo de la red en que las líneas de flujo sean horizontales, ver Figura 5.27, con lo que se tiene que el caudal “ $q$ ” de un tubo de flujo, cuya permeabilidad característica es  $K_m$ , sería:

**Figura 5.27**  
**Red de Flujo en Sistema Real (x,y)**



$$q = m \cdot \frac{\Delta h}{l} \cdot K_m \quad (5.184)$$

donde la pérdida de carga y la relación de lados se pueden escribir como:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{H}{N_p} \quad (5.185)$$

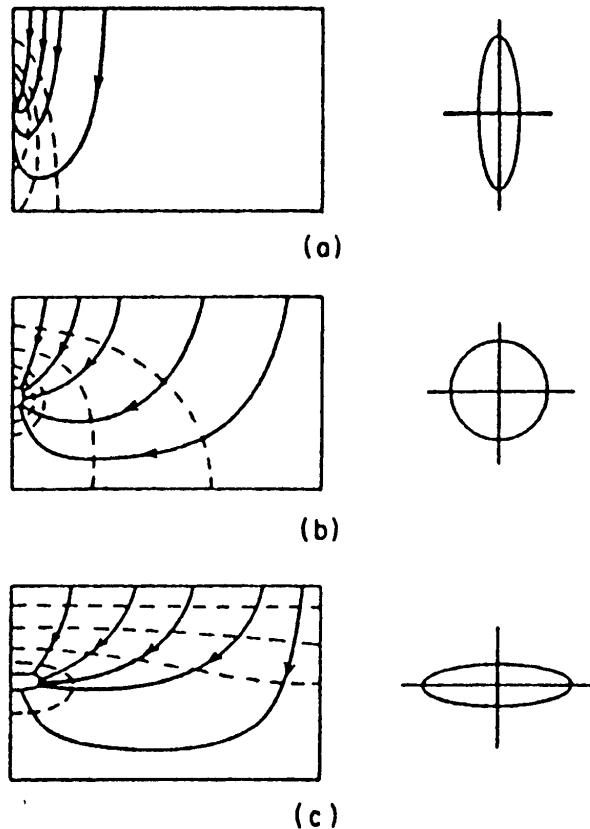
$$\frac{m}{l} = a = \sqrt{\frac{K_v}{K_H}} \quad (5.186)$$

Considerando que el caudal total de filtración es  $Q = N_t \cdot q$ , se tiene:

$$Q = N_t \cdot \sqrt{\frac{K_v}{K_H}} \cdot \frac{H}{N_p} \cdot K_H = H \cdot \frac{N_t}{N_p} \sqrt{K_v \cdot K_H} \quad (5.187)$$

Un ejemplo de un medio anisotrópico y su efecto sobre la Red de Flujo se presenta en la Figura 5.28.

**Figura 5.28**  
**Efecto de Anisotropía sobre la Red de Flujo para Dren Horizontal**



### 7.8 Fijación de la superficie libre de un escurrimiento

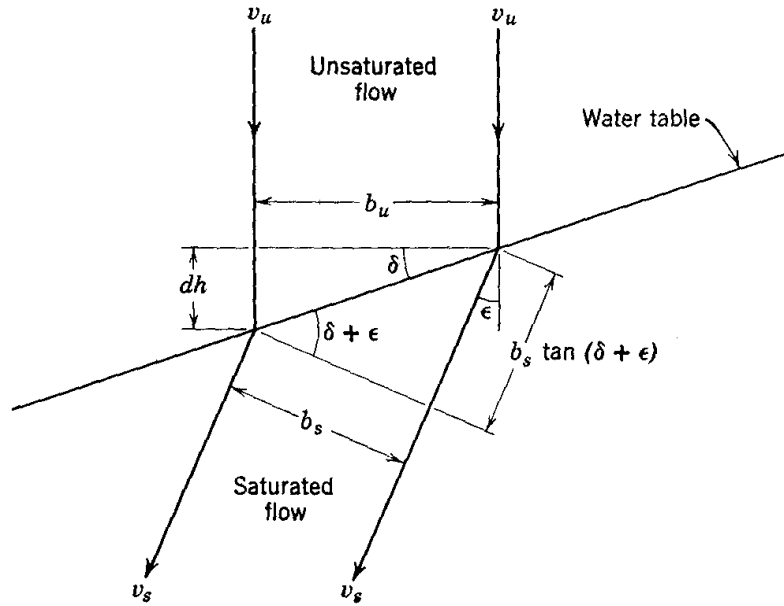
En el caso de problemas en que una de sus condiciones de borde sea una superficie libre de escurrimiento (sometida a la presión atmosférica), se procede por tanteos dándose una ubicación estimada para dicha superficie, trazando luego la red de escurrimiento y verificando luego si la superficie estimada cumple con la condición de ser una superficie libre. Esta condición es que a lo largo de todos sus puntos se cumpla que:

$$h = Z + \frac{P_a}{g} \quad (5.188)$$

h : cota piezométrica  
 Z : cota geométrica  
 P<sub>a</sub> : presión atmosférica  
 g : viscosidad cinemática

De no cumplirse esta condición se modifica el trazado de dicha superficie y se corrige la red de flujo hasta obtenerse la condición señalada. En aquellos casos en los cuales se tiene un flujo de agua sobre el nivel freático (percolación o recarga vertical) las líneas de flujo no son paralelas a la superficie libre. Para ilustrar este efecto de refracción consideremos que  $v_U$  es la velocidad vertical no en la zona no saturada y  $v_S$  es la velocidad bajo el nivel freático (ver Figura 5.29).

**Figura 5.29**  
**Refracción de Líneas de Flujo a lo largo del Nivel Freático**



A partir de esta figura es posible calcular la velocidad en la zona saturada como:

$$v_s = K \cdot i = K \cdot \frac{dh}{b_s \cdot \tan(\delta + \epsilon)} \quad (5.189)$$

pero,

$$dh = b_u \cdot \tan \delta \quad (5.190)$$

con lo que podemos escribir,

$$v_s = K \cdot \frac{b_u \cdot \tan \delta}{b_s \cdot \tan(\delta + \epsilon)} \quad (5.191)$$

Por continuidad se tiene:

$$Q = v_u \cdot b_u = v_s \cdot b_s \quad (5.192)$$

con lo que se obtiene:

$$v_s = K \cdot \frac{v_u \cdot \tan \delta}{v_u \cdot \tan(\delta + \epsilon)} \quad (5.193)$$

Si se resuelve esta ecuación para obtener el valor del ángulo  $\epsilon$  se tiene:

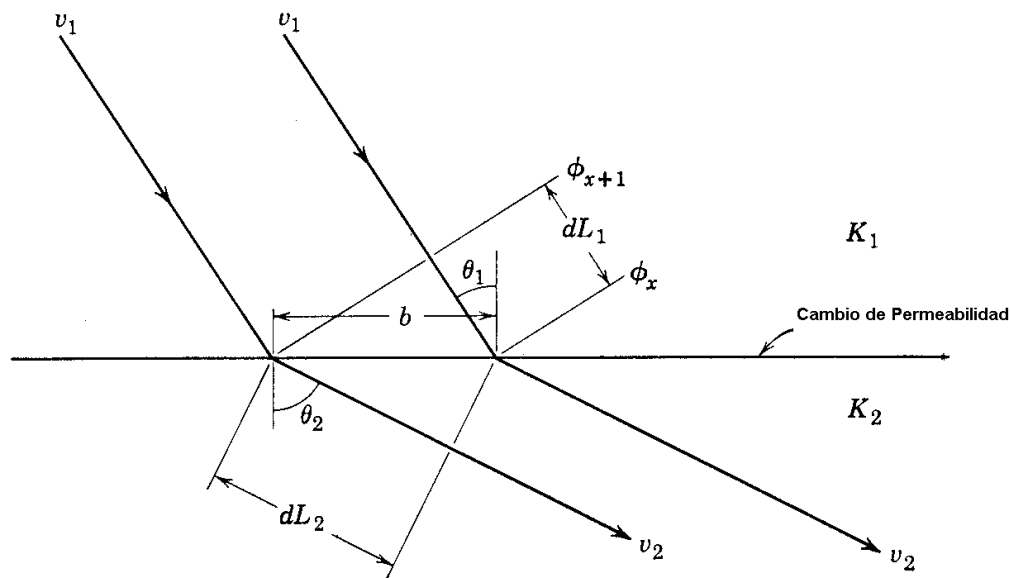
$$e = \tan^{-1} \left( \frac{K}{v_v} \cdot \tan d \right) - d \quad (5.194)$$

Este último resultado permite establecer que para  $v_v > 0$  las líneas de flujo forman un ángulo de  $(90 - d - e)$  bajo el nivel freático. Para el caso en que no exista percolación vertical, i.e.  $v_v = 0$  y  $e = 90^\circ - d$ , con lo que se tiene que las líneas de flujo son paralelas al nivel freático.

## 7.9 Refracción de líneas de flujo al pasar de un medio de distinta permeabilidad a otra

Consideremos la situación indicada en la Figura 5.30, en la cual líneas de flujo en un medio de permeabilidad  $K_1$  son modificadas al pasar a un medio de permeabilidad  $K_2$ .

**Figura 5.30**  
**Refracción de Líneas de Flujo en un Medio de Distintas Permeabilidades**



Definamos los siguientes términos:

$v_1$ : componente de la velocidad del escurrimiento en el medio de permeabilidad  $K_1$  que llega normalmente a la superficie de separación.

$v_2$ : componente de la velocidad del escurrimiento en el medio  $K_2$  que sale normalmente a la superficie de separación.

$\Delta h$ : pérdida de carga en interfase,  $(=f_{x+1} - f_x)$

$$v_1 = K_1 \cdot \frac{\Delta h}{dL_1} \cdot \cos q_1 \quad ; \quad dL_1 = b \cdot \sin q_1 \quad (5.195a)$$

$$v_2 = K_2 \cdot \frac{\Delta h}{dL_2} \cdot \cos q_2 \quad ; \quad dL_2 = b \cdot \sin q_2 \quad (5.195b)$$

Por condiciones de continuidad en la interfase de los dos medios debe cumplirse que:

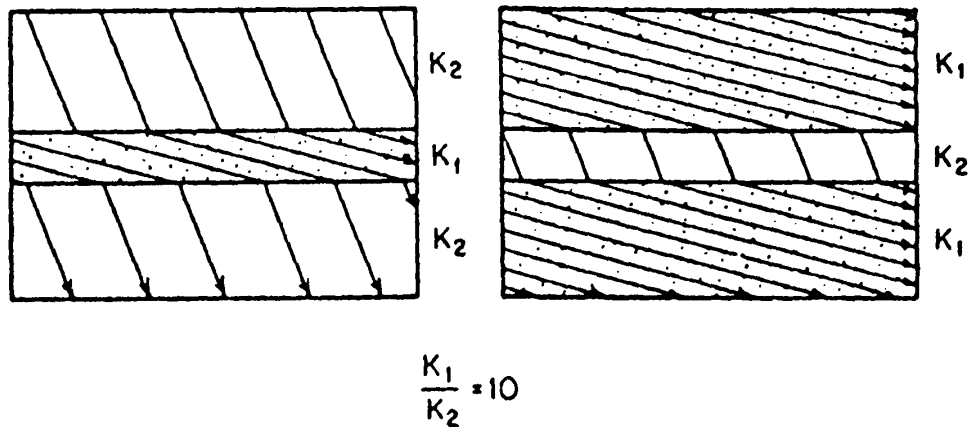
$$v_1 = v_2 \quad (5.196)$$

Al substituir las expresiones para  $v_1$  y  $v_2$  se obtiene:

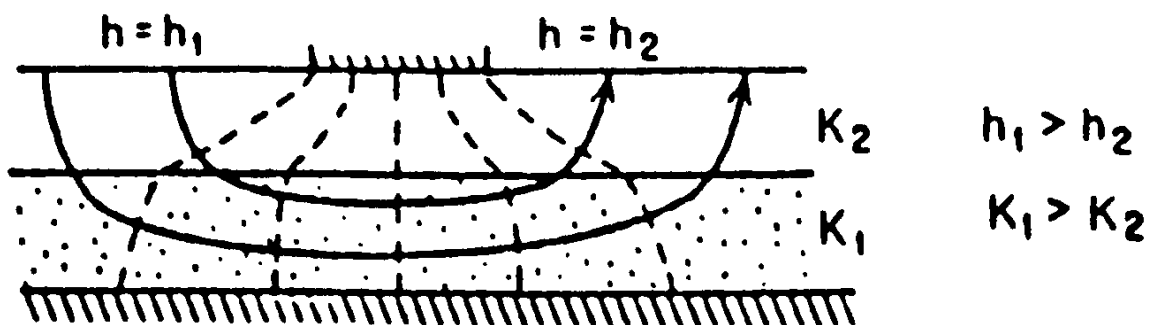
$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} \quad (5.197)$$

Lo anterior muestra que para un flujo saturado que pasa de un medio de una permeabilidad a otra diferente se produce la refracción de las líneas de flujo. Ese efecto de refracción se observa en las Figuras 5.31 y 5.32.

**Figura 5.31**  
**Refracción en un Medio Poroso compuesto por Arena Fina y Gruesa**



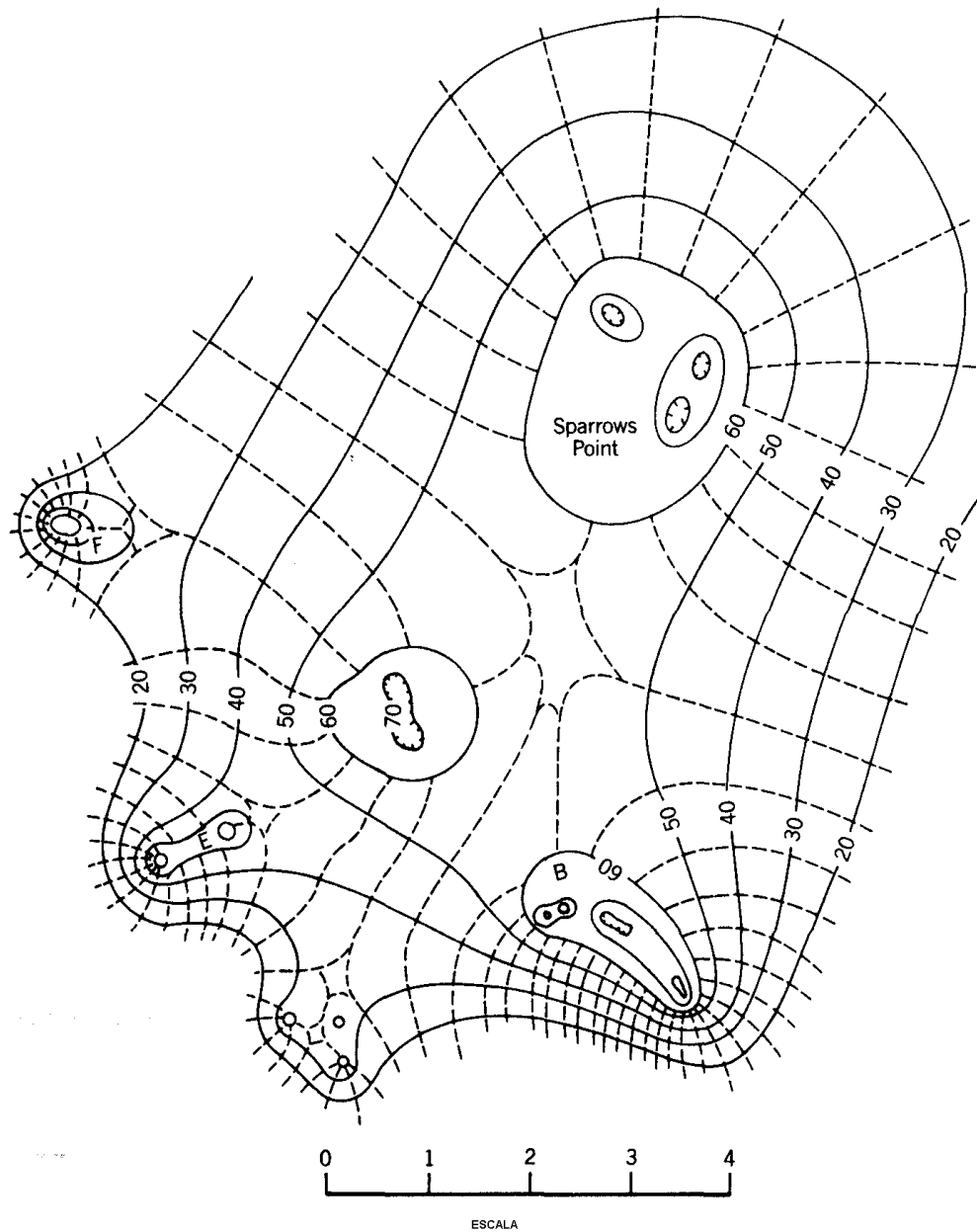
**Figura 5.32**  
**Refracción en un Medio Poroso Situado bajo Muro de Presa**



## 7.10 Ejemplo de Red de Flujo

La Figura 5.33 muestra un clásico ejemplo de una red de flujo estudiada por Bennet y Meyer (1952). Esta Red de Flujo es para la formación Patuxent, donde la carga hidráulica indica un escurrimiento que ocurre bajo el nivel del mar. El gran número de zonas de bajo nivel piezométrico es causado por un excesivo bombeo. Las líneas continuas escriben curvas de igual potencial piezométrico (en este caso profundidad bajo el nivel del mar), mientras que las líneas segmentadas corresponden a líneas de flujo.

**Figura 5.33**  
**Ejemplo de Red de Flujo**



## **8. MODELOS NUMERICOS**

### **8.1 Introducción**

Un modelo es una herramienta diseñada para representar una versión simplificada de la realidad. A partir de esta definición muy amplia de modelo es evidente que en nuestra vida cotidiana usamos constantemente modelos. Por ejemplo, un mapa carretero es un modelo dado que es una manera esquemática de representar la realidad.

De la misma manera, los modelos de agua subterránea son también una representación de la realidad de tal forma que, cuando están correctamente contruidos, pueden ser herramientas muy útiles para el manejo de recursos de agua subterránea.

Un modelo matemático de un sistema acuífero es simplemente un conjunto de ecuaciones diferenciales (por ejemplo Laplace) que junto con las condiciones de borde e iniciales apropiadas permite representar en forma adecuada el comportamiento de un sistema real. En la gran mayoría de los casos reales, la geometría del problema, sus complejas condiciones de borde y otras situaciones diversas hacen muy difícil obtener una solución directa de las ecuaciones que representan el sistema de flujo. En estos casos, el uso de un modelo numérico (aproximación del modelo matemático) es muy apropiado para encontrar una solución aceptable en términos de precisión y tiempo de resolución.

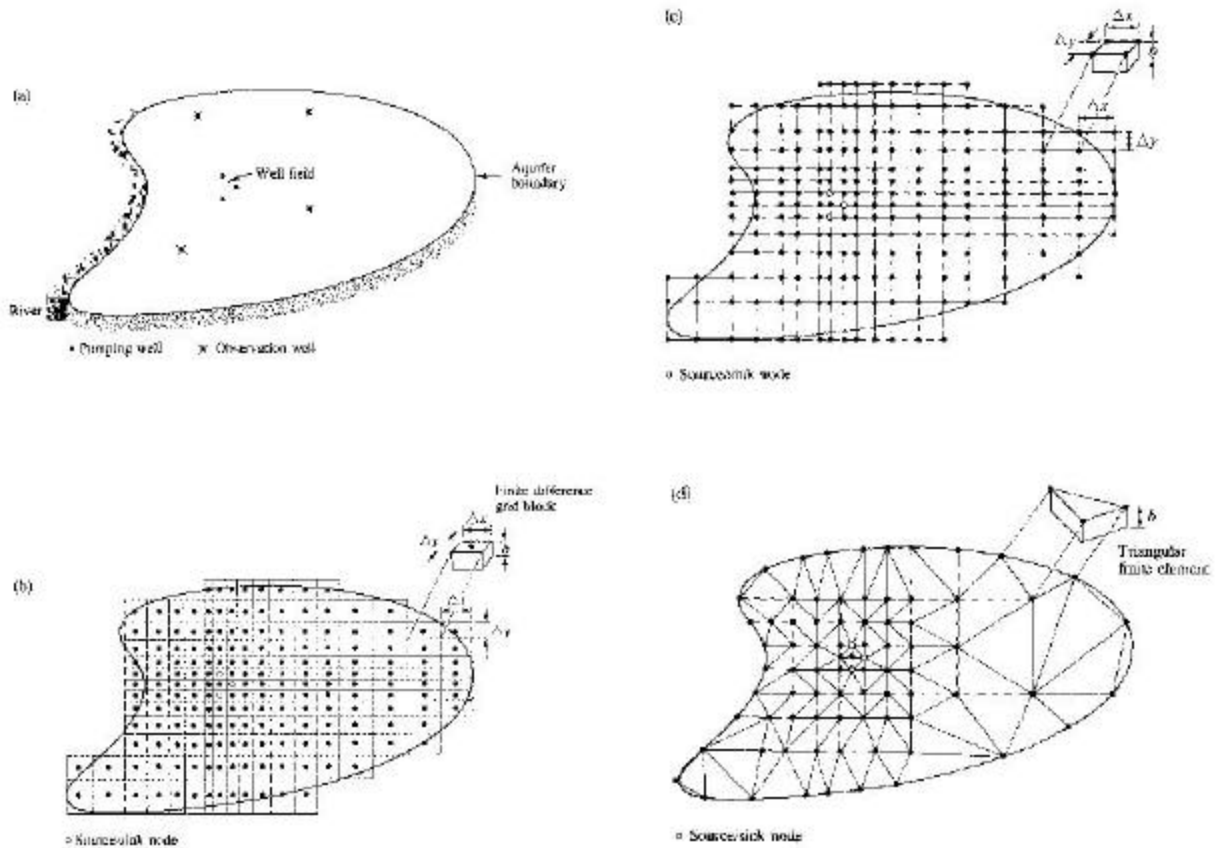
En términos muy simplificados es posible identificar dos grandes grupos de modelos numéricos para el caso de problemas de flujo en aguas subterráneas: Diferencias Finitas y Elementos Finitos. Para su aplicación ambos métodos requieren que el sistema real sea aproximado por medio de una malla de puntos que a su vez forman elementos. La Figura 5.34 muestra un ejemplo de un sistema real en el cual existe un campo de pozos, el cual aparece representado por medio de un esquema de bloques con nodos centrados, un esquema de nidos ubicados en vértices de la malla y una aproximación con elementos triangulares. En cada uno de estos esquemas o mallas de aproximación los nodos representan posiciones en las cuales se desea conocer la variable de estado del problema (cota piezométrica, velocidad de Darcy, entre otros).

El objetivo fundamental de un modelo de simulación es predecir el valor de una variable desconocida (por ejemplo cota piezométrica o concentración de contaminante) en los nudos de la malla.

### **8.2 Diferencias Finitas**

Un modelo matemático para un sistema de aguas subterráneas en régimen permanente consiste en una ecuación diferencial (ecuación de Laplace) y condiciones de borde que permiten definir un problema específico. Para resolver este modelo se debe calcular el valor de la carga piezométrica,  $h$ , en cualquier punto dentro del dominio. Usando técnicas de cálculo es posible, en condiciones simples, encontrar una solución analítica exacta o aproximada.

**Figura 5.34**  
**Ejemplos de Mallas de Aproximación**



En muchos casos, para encontrar una solución analítica es necesario utilizar supuestos que no son realistas, con lo cual la solución en sí no es válida. En estos casos es necesario recurrir a aproximaciones numéricas que permitan obtener una solución aproximada para dicho problema. Los métodos de Diferencias Finitas y Elementos Finitos proporcionan una forma racional de transformar las ecuaciones diferenciales que describen el problema en ecuaciones matriciales que pueden ser resueltas en forma directa o indirecta a través de esquemas numéricos más o menos complejos.

El procedimiento tradicional para el desarrollo de un modelo numérico de aguas subterráneas se resume en la Figura 5.35. Este procedimiento incluye la transformación de las ecuaciones matemáticas en un modelo aproximado, la solución del problema aproximado y su comparación con una solución analítica y la comparación, en el caso que sea posible, de resultados obtenidos con el modelo de simulación con resultados experimentales de laboratorio o de terreno.



**Figura 5.35**  
**Elaboración de un Modelo Numérico**

