

TEMA 6
FLUJO EN MEDIOS POROSOS NO SATURADOS

CI51J Hidráulica de Aguas Subterráneas y Su Aprovechamiento

Profesor C. Espinoza
Semestre Otoño 2005

INDICE

| | | |
|-----|---|----|
| 1. | INTRODUCCION | 1 |
| 2. | SUBDIVISIONES EN LA ZONA NO SATURADA..... | 1 |
| 3. | CONTENIDO DE HUMEDAD | 2 |
| 4. | NIVEL FREÁTICO..... | 2 |
| 5. | PRESIÓN NEGATIVA Y TENSÍOMETROS..... | 4 |
| 6. | CURVAS CARACTERÍSTICAS PARA PARÁMETROS HIDRÁULICOS NO SATURADOS..... | 5 |
| 6.1 | Aspectos Generales..... | 5 |
| 6.2 | Curva Característica de un Suelo..... | 5 |
| 6.3 | Curva de Conductividad Hidráulica en función de la Presión Interna, $K(h)$ | 8 |
| 7. | LEY DE DARCY-BUCKINGHAM..... | 8 |
| 8. | ECUACION DE FLUJO EN UN MEDIO POROSO NO SATURADO | 10 |
| | REFERENCIAS | 14 |

1. INTRODUCCION

Dentro de las ciencias que estudian el flujo de agua en la zona no saturada, tenemos a la agronomía, hidráulica y geología. Una de las aplicaciones más directas en el campo de la hidráulica, es el estudio de recarga de acuíferos y estudios de flujo y transporte en pilas de lixiviación. En los últimos tiempos, han surgido problemas ambientales, tales como contaminación de suelos y acuíferos, los cuales necesitan un estudio combinado de todas las áreas antes mencionadas, que permitan abordar el problema en forma integral.

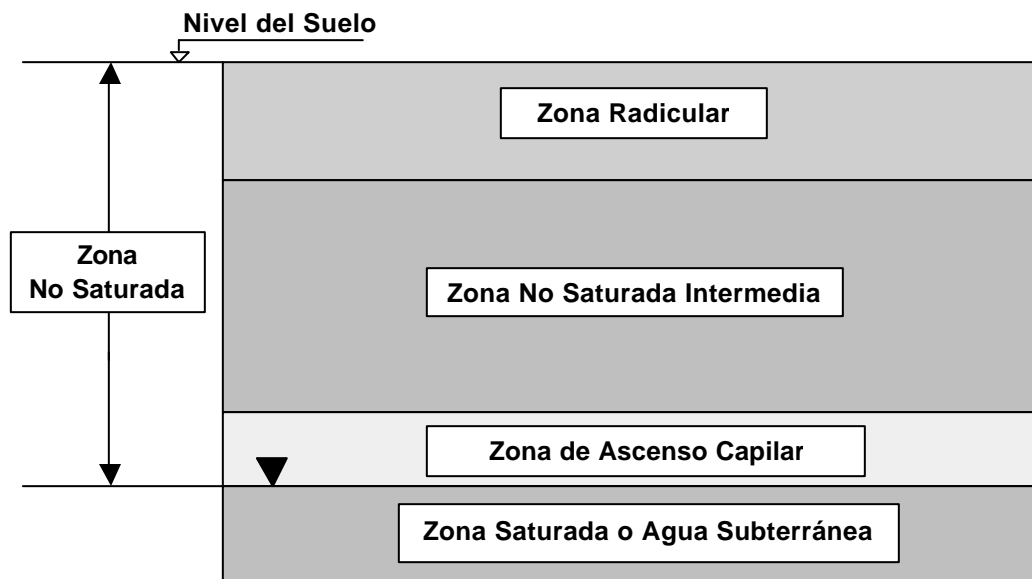
Generalmente la ley de Darcy y los conceptos de carga hidráulica y conductividad hidráulica han sido desarrollados para el caso de un medio poroso saturado, es decir, aquel cuyos huecos o poros se encuentran completamente llenos de agua. Es claro que algunos suelos, especialmente aquellos ubicados cerca de la superficie del terreno, se encuentran raramente saturados. Sus poros están sólo parcialmente con agua, mientras que el resto de ellos se encuentran ocupados por aire. El flujo de agua bajo estas condiciones se denomina *flujo no saturado* o *flujo parcialmente saturado*.

2. SUBDIVISIONES EN LA ZONA NO SATURADA

Los diversos procesos de flujo, transporte, degradación y atenuación de contaminantes en el suelo, ya sea en fuentes puntuales y difusas, se produce principalmente en tres zonas, dependiendo de la ubicación del foco de contaminación.

La primera corresponde a la zona radicular o de raíces en el suelo, lugar donde existe una mayor cantidad de aire, bacterias e intersticios. Aquí la principal fuente de atenuación es la degradación aeróbica. La segunda corresponde a la zona no saturada del suelo y está ubicada entre la zona radicular y la zona de ascenso capilar. Por último la zona de ascenso capilar. En la Figura 1 se presenta un resumen esquemático de las zonas antes mencionadas.

Figura 1
Subdivisiones en la Zona No Saturada



Conociendo que existen tres zonas bien definidas dentro del suelo, presta vital importancia saber las ecuaciones de flujo y transporte en un medio poroso no saturado, de tal manera de representar correctamente los fenómenos que se producen en dicha zona. Cabe señalar que las ecuaciones de medios porosos son efectivas sólo en la zona radicular y la zona intermedia.

3. CONTENIDO DE HUMEDAD

Si el volumen total de una porción de suelo o roca V_T es dividido entre el volumen de la porción sólida V_s , el volumen de agua V_w , y el volumen de aire V_A , el contenido de humedad volumétrica θ se puede definir como:

$$q = \frac{100 \cdot V_w}{V_T} \quad (1)$$

Para flujo saturado, $\theta = n$; para flujo no saturado, $\theta < n$.

4. NIVEL FREÁTICO

La configuración hidrogeológica más simple donde se encuentran condiciones saturadas y no saturadas es aquella en la cual se encuentra una zona no saturada cerca de la superficie del suelo y una zona saturada en profundidad, tal como lo ilustra la Figura 2a.

En general se asume que el nivel freático es la línea divisoria entre ambas zonas, lo que implica desconocer la existencia de una zona que se encuentra saturada debido a condiciones capilares, en las cuales el agua asciende a través de los pequeños poros de suelo debido a tensión superficial. El contenido de humedad en una vertical se presenta en la Figura 2b. En la zona saturada la presión del fluido es mayor que la atmosférica debido al peso de la columna de agua localizada sobre dicha sección. A medida que nos aproximamos al nivel freático la presión del fluido disminuye debido a que la columna de agua sobre cada sección reduce su espesor.

El nivel freático se puede definir en forma simple como el lugar común de todas aquellas profundidades en las cuales la presión del fluido es igual a la presión atmosférica. En otras palabras, es aquella superficie en la cual la presión del fluido en los poros de un medio poroso es exactamente igual a la atmosférica.

Un experimento imaginario puede servir para ilustrar la formación del nivel freático en un sistema acuífero real. Una caja de material plástico transparente se llena de arena. Una pequeña cuña es cortada en uno de los costados de esta caja, y la superficie de la arena es moldeada para simular un valle que drena hacia la cuña (Figura 3). Un rociador muy fino es usado para esparcir agua en forma uniforme sobre la superficie de la arena y simular la existencia de lluvia sobre este sistema. La tasa de precipitación debe ser suficientemente pequeña para evitar la existencia de flujo superficial (es decir, toda el agua debe infiltrar). El agua infiltrada se moverá hacia el fondo de la caja produciendo una zona de saturación en el fondo. Si se continúa simulando precipitación sobre la zona el nivel freático se elevará hasta que el agua comience a salir por la zona de la cuña en el costado de la caja plástica.

Figura 2

Condiciones del agua subterránea cerca de la superficie del suelo. (a) Zonas saturada y no saturada; (b) perfiles del contenido de humedad versus profundidad; (c) presión y cota piezométrica en distintas profundidades; (d) perfil de presión versus profundidad; (e) perfil de cota piezométrica versus profundidad.

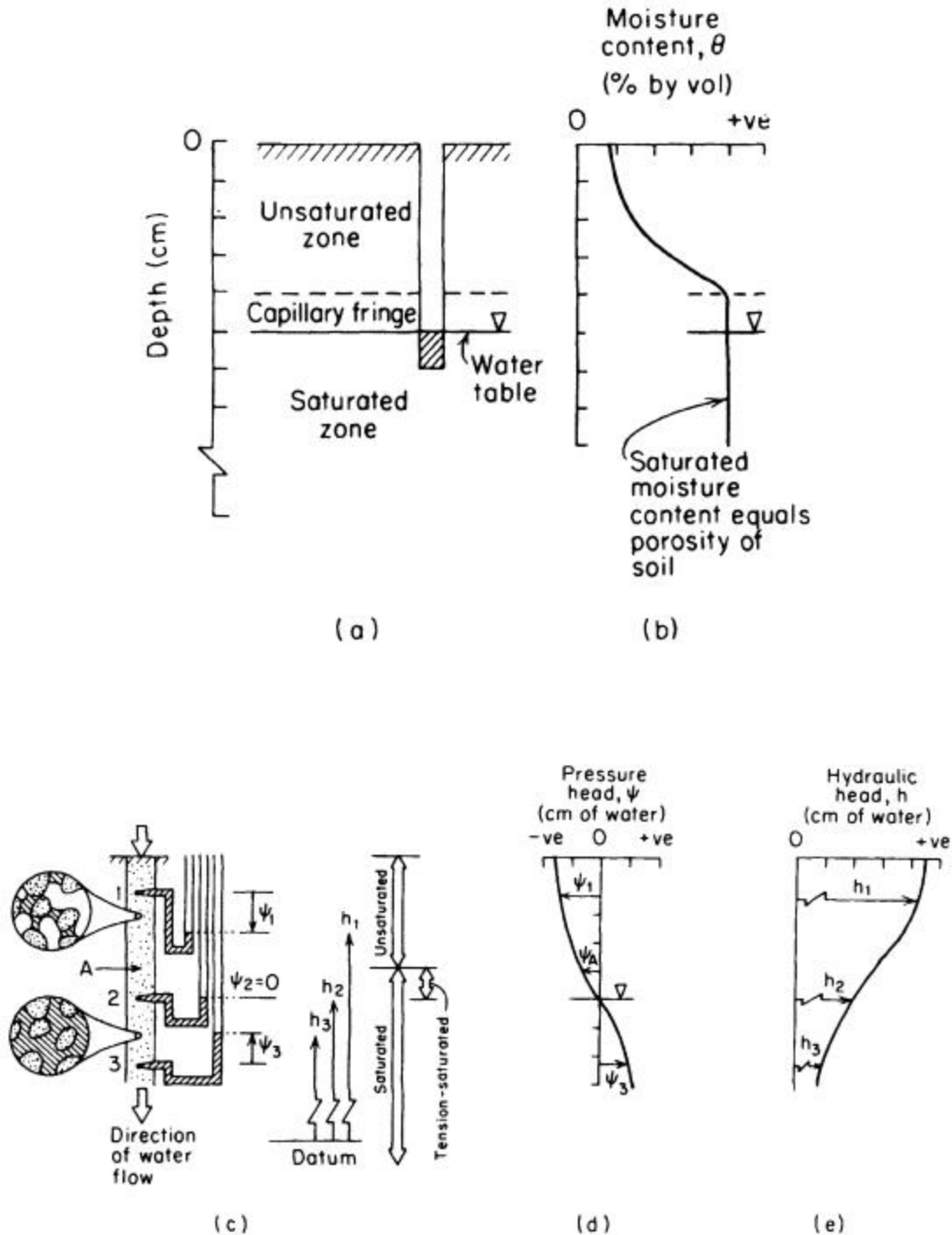
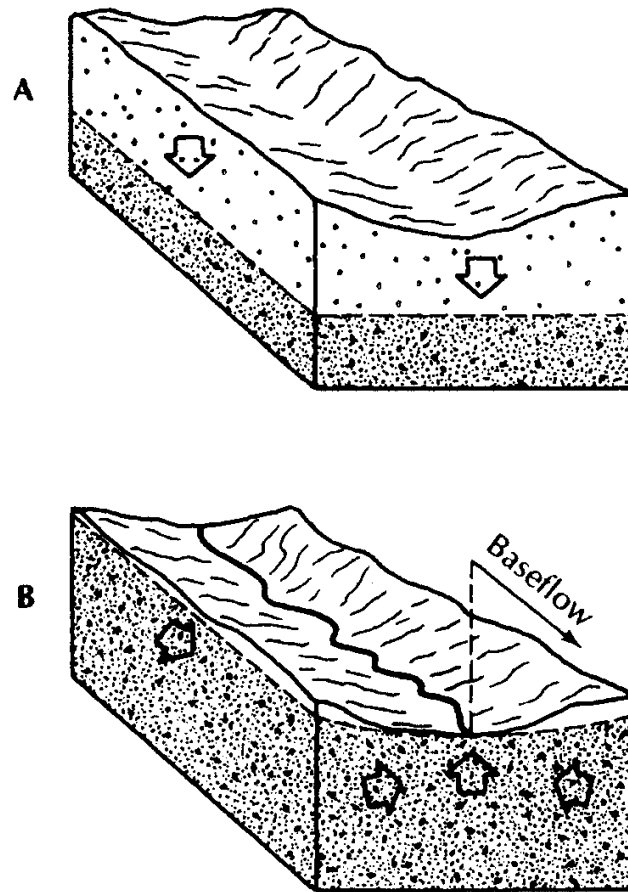


Figura 3
Variación del Nivel Freático debido a Precipitación



Si se continúa agregando agua como precipitación sobre la zona de estudio el nivel freático continuará elevándose y se generará un escurrimiento superficial o flujo base debido a la recarga desde el sistema acuífero (afloramiento). A partir de este análisis imaginario podemos realizar las siguientes observaciones:

1. Si no existe flujo subterráneo el nivel freático debiera ser horizontal.
2. Un nivel freático inclinado indica la existencia de un flujo de agua subterránea.
3. Zonas de descarga de agua subterránea se ubican en los sectores más bajos del terreno.
4. El nivel freático tiene la misma forma general que la superficie del terreno.
5. El agua subterránea generalmente fluye desde las zonas altas hacia los puntos bajos del terreno.

5. PRESIÓN NEGATIVA Y TENSIÓMETROS

Hemos visto hasta el momento que la altura de presión h o ψ es mayor que cero en la zona saturada (según lo indican las medidas en piezómetros), y que ψ es igual a cero en la superficie libre o nivel freático (presión del fluido es igual a la atmosférica). En el caso de la zona no saturada la altura de presión, ψ , es menor que cero. Esto refleja el hecho que el agua en la zona no saturada es mantenida en los poros de suelo debido a tensiones o fuerzas superficiales

que actúan como una bomba que succiona y mantiene el agua colgada dentro de los poros. Mientras más baja es la humedad del suelo, más alta debe ser la succión que el suelo debe aplicar para mantener esa agua dentro de los poros. En física de suelos se acostumbra denominar a la altura de presión, cuando es negativa, *succión*.

La Figura 2c muestra la variación en cota piezométrica en tres puntos a lo largo de una columna vertical. El punto 1 se encuentra localizado en la zona no saturada, mientras que los puntos 2 y 3 se ubican en la zona saturada. Finalmente, las Figuras 2d y 2e muestran la distribución de la altura de presión ψ y de la cota piezométrica $h=\psi+z$.

6. CURVAS CARACTERÍSTICAS PARA PARÁMETROS HIDRÁULICOS NO SATURADOS

6.1 Aspectos Generales

El análisis del flujo en la zona no saturada presenta una complicación adicional con respecto a la zona saturada. En este caso, el contenido de humedad, θ , y la conductividad hidráulica, K , son funciones de la altura de presión, ψ . De esta manera, la caracterización de un suelo requiere la determinación de ambas relaciones funcionales $\theta(\psi)$ (Curva característica de un suelo) y $K(\psi)$ (Conductividad hidráulica).

En lo que respecta a la relación entre el contenido de humedad y la altura de presión, algunas observaciones experimentales han mostrado que esta relación posee un problema de histéresis; esto es que la relación entre ψ y θ es diferente cuando un suelo se encuentra llenándose o vaciándose. Debido a que la conductividad hidráulica es también una función de ψ , la relación $K(\psi)$ también posee histéresis. La Figura 4 muestra un ejemplo del fenómeno de histéresis en un suelo de características arenosas.

6.2 Curva Característica de un Suelo

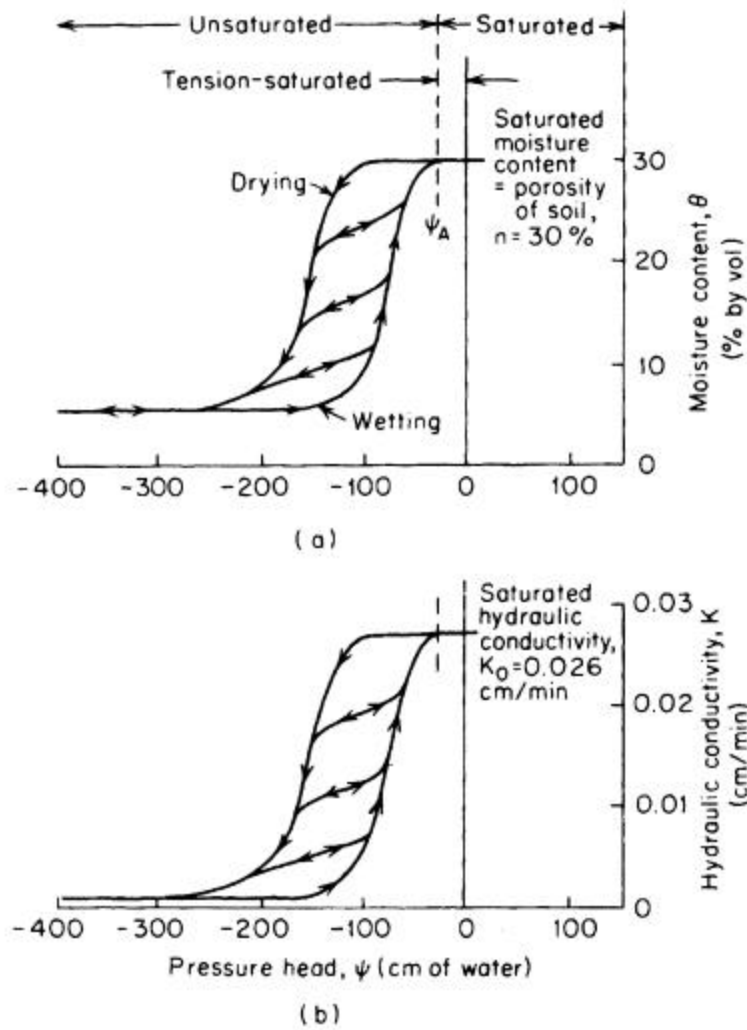
Esta curva describe la capacidad del suelo de almacenar y liberar agua, y corresponde a la relación entre el contenido volumétrico de agua presente en el suelo y la succión presente en la matriz de suelo (Rawls et al. 1993). Existe una gran variedad de ecuaciones que describen la forma de curva de retención. En especial, la expresión (2.25), muestra el modelo propuesto por Van Genuchten para la curva de retención de agua.

$$\theta(y) = \begin{cases} \theta_{res} + \frac{\theta_{sat} - \theta_{res}}{\left[1 + (\alpha \cdot |y|)^n\right]^m} & \text{para } y < 0 \\ \theta_{sat} & \text{para } y \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

con:

- θ_{sat} : Contenido volumétrico saturado de agua, equivalente a la porosidad del suelo [L^3/L^3].
- θ_{res} : Contenido volumétrico residual de agua, corresponde a la humedad del suelo para un nivel mínimo de presión interna [L^3/L^3].
- m : $1-1/n$, donde n es un parámetro empírico
- α : Factor de escala [$1/L$].

Figura 4
Curvas características que muestran el fenómeno de histieresis en un suelo arenoso



La curva de succión puede ser generada utilizando el método de la “olla y plato de presión”. Este método se compone de una olla o cámara que, cerrada herméticamente, recibe presión de aire o un gas inerte (N) desde un compresor (Figura 5). De esta manera, aplicando una presión se simula la condición de succión a la cual se ve sometida el agua en el suelo. Se utilizan platos de presión, los cuales están compuestos por un plato de cerámica poroso, cuya cara inferior esta cubierta por un delgado diafragma de neopreno, con una red interna entre el plato y el diafragma que permite el flujo de agua. Un tubo interno comunica este conducto con un tubo de flujo externo que conecta la olla con la atmósfera.

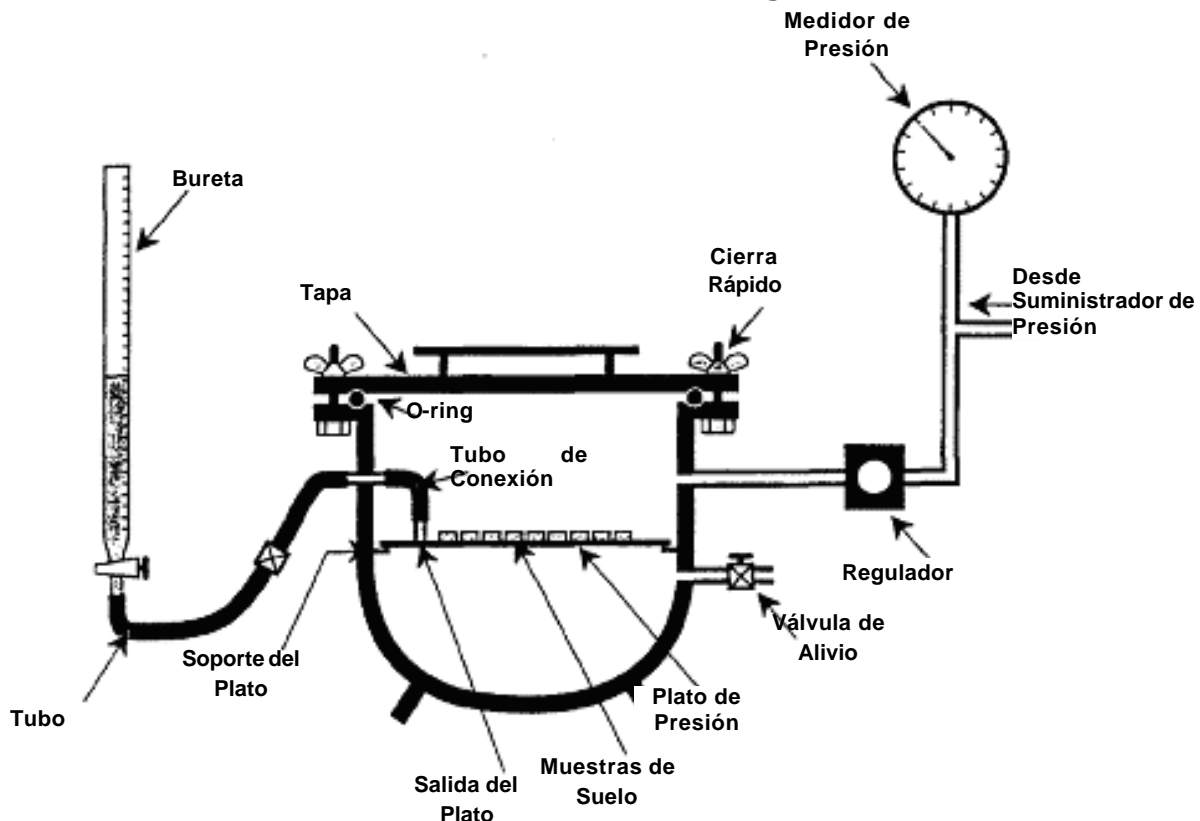
Los poros del plato permiten que se forme una continuidad líquida con los poros del suelo analizado, para así poder evacuar el agua que es desplazada desde el suelo por la presión ejercida por el aire comprimido. El agua desplazada, corresponde a aquella fracción del suelo que no es capaz de retener a una presión dada. De igual forma el agua que se queda retenida por el suelo a una determinada tensión. Una vez equilibradas las muestras a una presión determinada, se secan y se determina su contenido de agua. Repitiendo este procedimiento

para diferentes presiones es posible de generar la curva característica del suelo (Facultad de Agronomía Universidad de Chile, 2003).

Las muestras antes de ser ubicadas dentro de la olla deben acondicionadas ser secadas al aire, luego se muelen y se tamizan a 2 mm. El método contempla ubicar una o más muestras de suelo con tres repeticiones en la superficie del plato cerámico. Dentro de los puntos típicos utilizados para definir la curva de succión, se tienen:

- **Saturación:** Cuando todo el espacio poroso está ocupado por el agua. La tensión es inferior a 0.3 bares y el agua esta sujeta por la fuerza de gravedad.
- **Capacidad de Campo (CC):** contenido de agua en el suelo una vez drenado libremente en el perfil, aproximadamente 24 a 48 horas después de la saturación. Sólo una parte de los poros esta llena de agua (microporos). Esta situación se asocia a una tensión en el suelo de 0.3 bares (306 cm de H₂O).
- **Punto de Marchitez Permanente (PMP):** contenido de agua en el suelo en el cual una planta es incapaz de extraer agua y se marchita sin poder recuperarse al reestablecer el contenido de humedad. El agua está retenida en delgadas películas y con mucha fuerza alrededor de las partículas de suelo, asociada a una tensión de 15 bares (15296 cm de H₂O).

Figura 5
Sistema Para Medir la Retención de Agua en el Suelo



6.3 Curva de Conductividad Hidráulica en función de la Presión Interna, $K(h)$.

La conductividad hidráulica es una medida de la capacidad del suelo para transmitir agua y depende tanto de las características del suelo como del fluido (Rawls et al., 1993). La expresión (3), muestra el modelo propuesto por Van Genuchten para la curva de conductividad saturada.

$$K(y) = \begin{cases} K_{sat} \frac{[1 - (a \cdot |y|)^{(n-1)} [1 + (a \cdot |y|)^n]^{-m}]^2}{[1 + (a \cdot |y|)^n]^{\frac{m}{2}}} & \text{para } y < 0 \\ K_{sat} & \text{para } y \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

con:

- K_{sat} : Conductividad hidráulica en medio saturado (L/T).
- m : $1-1/n$, donde n es un parámetro empírico.
- α : Factor de escala (1/L).

Otra forma de expresar la ecuación (3) permite describir la conductividad hidráulica en la zona no saturada como se muestra en (4).

$$K(y) = K_{sat} \cdot K_r(y) \quad (4)$$

donde:

- $K(\psi)$: Conductividad hidráulica para una presión ψ . (L/T).
- $K_r(\psi)$: Conductividad relativa como función de la presión de poros (adimensional).

En el Anexo 1, se presentan una serie de ecuaciones alternativas a la utilizada en este trabajo, que permiten expresar las funciones $K(\theta)$, $h(\theta)$, $\theta(\psi)$ y $D(\theta)$.

7. LEY DE DARCY-BUCKINGHAM

La ley de Darcy en condiciones no saturadas presenta una pequeña modificación con respecto al caso saturado. Para la velocidad en la dirección x podemos escribir:

$$v_x = -K(y) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5)$$

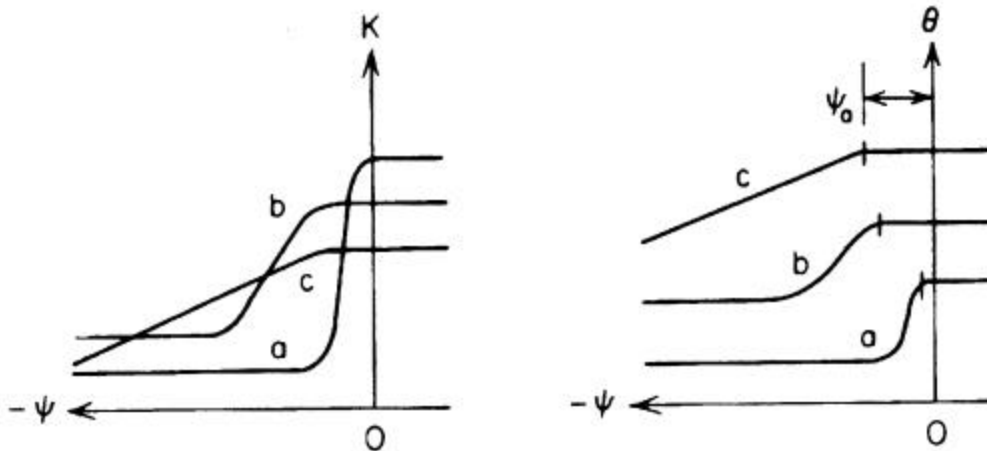
o, considerando que ψ y θ están relacionados también podemos escribir:

$$v_x = -K(q) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \quad (6)$$

desde donde podemos observar que para el caso de un gradiente hidráulico constante, un aumento en el contenido de humedad del suelo se traduce en un aumento de la descarga específica o velocidad de Darcy. La Figura 6 muestra ejemplos teóricos (no incluyen histéresis) de curvas características para tres materiales distintos. En el caso de la curva de capacidad

hidráulica, el término ψ_a se conoce como la *altura de presión de entrada de aire*, y corresponde a aquella presión a partir de la cual el suelo comienza a drenarse.

Figura 6
Curvas características para tres suelos hipotéticos:
a) arena uniforme, b) arena limosa y c) arcilla limosa



En resumen, podemos describir las principales características de las zonas saturada y no saturada:

ZONA SATURADA

- 1.- Ocurre bajo el nivel freático
- 2.- Todos los poros llenos de agua
- 3.- Contenido de humedad es igual a la porosidad
- 4.- Presión del fluido es mayor a la atmosférica
- 5.- Carga hidráulica h se mide con piezómetros
- 6.- Conductividad hidráulica es constante
- 7.- $\psi > 0$

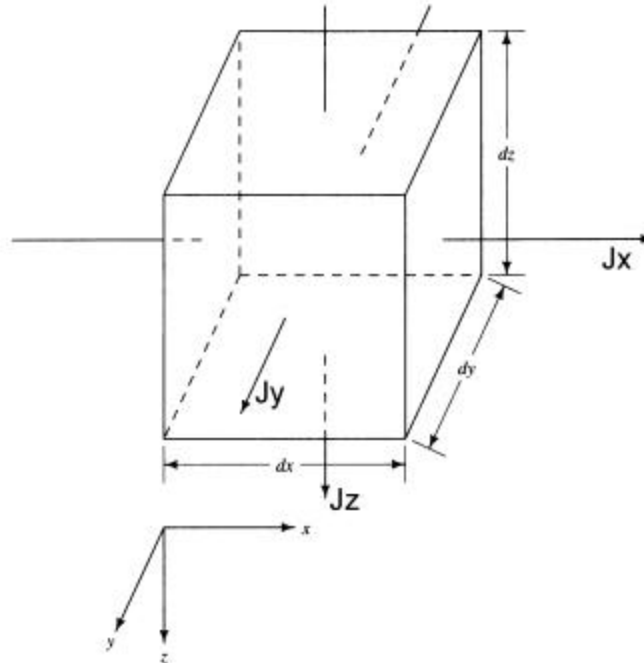
ZONA NO SATURADA

- 1.- Ocurre sobre el nivel freático
- 2.- Los poros se encuentran parcialmente llenos de agua
- 3.- Contenido de humedad es inferior a la porosidad
- 4.- Presión del fluido es menor que la atmosférica
- 5.- Carga hidráulica h se mide con tensiómetros
- 6.- Conductividad hidráulica es función de la humedad del suelo
- 7.- $\psi < 0$

8. ECUACION DE FLUJO EN UN MEDIO POROSO NO SATURADO

Consideremos un volumen de control rectangular como el que se muestra en la Figura 7. Este volumen de control tiene dimensiones Dx , Dy y Dz , mientras que su centro de masa P se encuentra ubicado en las coordenadas (x,y,z) .

Figura 7
Volumen de Control



Si no existen fuentes o sumideros dentro del área de control, la conservación de la masa establece:

$$\begin{array}{l} \text{Flujo neto de fluido en el} \\ \text{volumen de control} \end{array} \quad G_T = \begin{array}{l} \text{Tasa de cambio de la masa de} \\ \text{fluido dentro del volumen de} \\ \text{control} \end{array} \quad \frac{\partial M}{\partial t}$$

Supongamos que el vector \underline{J} representa el flujo de masa (masa por unidad de área y tiempo) de agua con densidad ρ en el punto $P(x,y,z)$. Entonces:

$$\underline{J} = \mathbf{r} \cdot \underline{v} \quad (7)$$

donde \underline{v} es el vector de descarga específica.

Si nos referimos a la Figura 5, el flujo neto de masa en la dirección x , G_x , se puede escribir como:

$$G_x = \left(J_x \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}, y, z} - J_x \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}, y, z} \right) \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (8)$$

En forma similar, en las direcciones y y z podemos escribir:

$$G_y = \left(J_y \Big|_{x, y-\frac{\Delta y}{2}, z} - J_y \Big|_{x, y+\frac{\Delta y}{2}, z} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z \quad (9)$$

$$G_z = \left(J_z \Big|_{x, y, z-\frac{\Delta z}{2}} - J_z \Big|_{x, y, z+\frac{\Delta z}{2}} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (10)$$

El flujo neto de masa dentro del área de control, G_T , está dado por la suma de las cantidades mostradas en las ecuaciones (8), (9) y (10); esto es:

$$G_T = \left(J_x \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}, y, z} - J_x \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}, y, z} \right) \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \left(J_y \Big|_{x, y-\frac{\Delta y}{2}, z} - J_y \Big|_{x, y+\frac{\Delta y}{2}, z} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \left(J_z \Big|_{x, y, z-\frac{\Delta z}{2}} - J_z \Big|_{x, y, z+\frac{\Delta z}{2}} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (11)$$

La masa de fluido almacenada dentro del volumen de control está dada por la densidad del fluido, la humedad del suelo y las características geométricas de éste, i.e:

$$M = \rho \cdot n \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \quad (12)$$

Dado que las dimensiones del volumen de control se mantienen fijas en el tiempo, la tasa temporal de cambio de la masa almacenada dentro de éste es:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot n) \quad (13)$$

Considerando la conservación de masa podemos igualar las expresiones (11) y (13). Al dividir ambas expresiones por $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ obtenemos:

$$-\frac{1}{\Delta x} \cdot \left(J_x \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}, y, z} - J_x \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}, y, z} \right) - \frac{1}{\Delta y} \cdot \left(J_y \Big|_{x, y+\frac{\Delta y}{2}, z} - J_y \Big|_{x, y-\frac{\Delta y}{2}, z} \right) - \frac{1}{\Delta z} \cdot \left(J_z \Big|_{x, y, z+\frac{\Delta z}{2}} - J_z \Big|_{x, y, z-\frac{\Delta z}{2}} \right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot n) \quad (14)$$

A continuación podemos tomar el límite de la ecuación anterior cuando el tamaño del volumen de control se reduce, es decir, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, y $\Delta z \rightarrow 0$. En este caso conviene recordar la definición de una derivada parcial:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{J_x \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}, y, z} - J_x \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}, y, z}}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} J_x \quad (15)$$

De esta manera, al reemplazar la definición de una derivada parcial en la ecuación (8) obtenemos:

$$-\left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}) \quad (16)$$

lo que puede ser escrito en forma reducida como:

$$-\nabla \cdot \underline{J} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}) \quad (17)$$

A continuación tratemos de expresar la ecuación (17) en términos de cantidades o variables de importancia en aguas subterráneas. El lado izquierdo de la ecuación (17) puede ser expandido utilizando la definición del flujo másico, \underline{J} , dado por la ecuación (7):

$$-\nabla \cdot \underline{J} = -\nabla \cdot (\mathbf{r} \cdot \underline{v}) = -\mathbf{r} \nabla \cdot \underline{v} - \underline{v} \cdot \nabla \mathbf{r} \quad (18)$$

En la mayoría de los problemas prácticos, el segundo término en la ecuación (18) es despreciable con respecto a los otros términos en la ecuación básica de continuidad. Por ejemplo, en una situación que involucra un fluido incompresible como el agua, la variación de densidad del fluido es prácticamente nula. De esta manera, podemos escribir para la ecuación (17):

$$-\mathbf{r} \nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}) \quad (19)$$

en la cual se ha eliminado el segundo término en la expansión de la ecuación (18). De acuerdo a algunos autores (Freeze y Cherry, 1979), al expandir el término del lado derecho en la ecuación (18) se puede despreciar la variación temporal de la densidad del fluido comparada con la variación temporal del contenido de humedad. De esta manera, al expandir la ecuación (19) se obtiene:

$$-\mathbf{r} \nabla \cdot \underline{v} = \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \approx \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \quad (20)$$

Simplificando esta última expresión se obtiene:

$$-\nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \quad (21)$$

Substituyendo la expresión de la ley de Darcy para flujo no saturado podemos escribir:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \quad (22)$$

Finalmente, considerando que la cota piezométrica h puede ser escrita como $h = \psi + z$, podemos reescribir la ecuación (22) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(\mathbf{y}) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} + 1 \right] \right) = C(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \quad (23)$$

donde $C(\mathbf{y}) = \frac{d\mathbf{q}}{d\mathbf{y}}$ es la capacidad específica de un suelo. Invertiendo los términos en la ecuación (23) se tiene:

$$C(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\mathbf{y}) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} + 1 \right] \right] \quad (24)$$

Luego, aplicando la regla de la cadena tenemos que:

$$C(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\mathbf{y}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} + 1 \right) \right] \quad (25)$$

Al observar la ecuación (25), nos damos cuenta que la humedad θ solo depende de ψ o presión de poros. Por tal motivo, las derivadas parciales se pueden transformar en derivadas totales, según lo que se presenta en la ecuación (26).

$$C(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\mathbf{y}) \cdot \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K(\mathbf{y}) \cdot \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\mathbf{y}) \cdot \left(\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} + 1 \right) \right] \quad (26)$$

Debido a que existe una relación funcional entre las dos variables de estado (ψ y \mathbf{q}), siendo las relaciones del tipo: $h = \psi(\mathbf{q})$ o $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\psi)$, se puede escribir la permeabilidad en función de la humedad, en el caso de ausencia de histéresis en el suelo. Luego, la relación es la siguiente:

$$K_i(\mathbf{y}(\mathbf{q})) = K_i(\mathbf{q}) \quad i : 1, 2, 3 \quad (27)$$

Reemplazando (27) en (26) se obtiene:

$$C(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\mathbf{q}) \cdot \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K(\mathbf{q}) \cdot \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\mathbf{q}) \cdot \left(\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} + 1 \right) \right] \quad (28)$$

Se define la difusividad del suelo-agua, de la siguiente manera:

$$D_i(\mathbf{q}) = K_i(\mathbf{q}) \cdot \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{q}} \quad i : 1, 2, 3 \quad (29)$$

Otra de las formas de expresar la ecuación de Richards dependiendo solo de la humedad como variable de estado, es la que se presenta en la ecuación (30).

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[D(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} + K(\mathbf{q}) \right] \quad (30)$$

En la ecuación (31) presenta en la llamada forma mixta, debido a que existen dos variables de estado que describen el problema, θ y ψ .

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(y) \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial z} + 1 \right] \right] \quad (31)$$

La resolución de la ecuación de Richards, requiere que se conozcan previamente las curvas de retención de agua $q(\psi)$ y la conductividad hidráulica en un medio poroso no saturado, $K(\psi)$ o $K(q)$. Existen una serie de modelos empíricos que describen el comportamiento de las curvas $q(\psi)$, $K(q)$ y $K(\psi)$, como los propuestos por Brooks and Corey (1964) y Van Genuchten (1980).

REFERENCIAS

- Domenico, P. and F. Schwartz. Physical and Chemical Hydrogeology. Wiley. 1998.
- Fetter, C.W. 1996. Contaminant Hydrogeology. Prentice Hall. 1993.
- Freeze A. And J. Cherry. Groundwater. Prentice Hall. 1979.
- Fetter, C.W. Applied Hydrogeology. Prentice Hall. 1988.
- D. Rassam, J. Šimunek and M. Th. Van Genuchten. "Modelling Variable Saturated Flow with HYDRUS-2D". ND Consult. First Edition. Brisbane. Australia. 2003.
- J. Šimunek, M. Šejna and M. Th. Van Genuchten. "The HYDRUS-2D Software Package for Simulating the Two-Dimensional Movement of Water, Heat and Multiple Solutes in Variably-Saturated Media". Version 2.0. U.S Salinity Laboratory Agricultural Research Service. U.S. Department of Agriculture. Riverside, California. April 1999.
- Jury, William. Gardner, Wilford. Gardner, Walter. "Soil Physics". Fifth Edition. By John Wiley & Sons, Inc. U.S.A. May. 1991.
- Selker, John. Keller, C. Kent. McCord, James. "Vadose Zone Processes". Lewis Publishers. ISBN: 0-87371-953-0. USA. 1999.