CI51J

CI51J
HIDRAULICA DE AGUAS SUBTERRANEAS Y SU APROVECHAMIENTO

TEMA 5
ECUACIONES GENERALES DE LA HIDRAULICA EN MEDIOS POROSOS
MODELOS NUMERICOS

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA CIVIL

INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

SOLUCION NUMERICA

- IMPLEMENTACION
- CONDICIONES DE BORDE

METODOS DE SOLUCION

- DIRECTO
- INDIRECTO O ITERATIVO

EJEMPLO

¿QUÉ ES UN MODELO NUMÉRICO?

- Modelo es un herramienta diseñada para representar una versión simplificada de la realidad.

- Modelo Numérico está compuesto de:
  - Modelo matemático (simplificado)
  - Condiciones de borde e iniciales
  - Esquema de discretización (MDF o MEF)
  - Malla o grilla de discretización

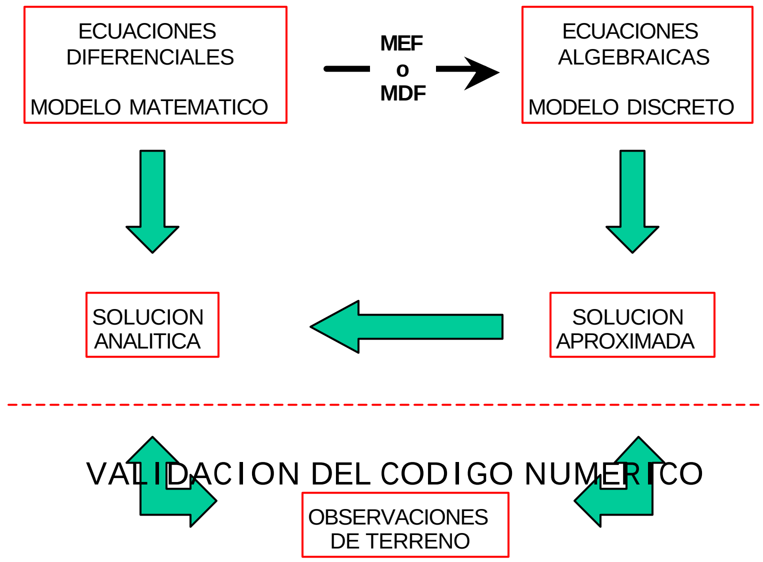
¿QUE ES UN MODELO NUMERICO DE AGUA SUBTERRANEA?

MATEMATICO → **ANALITICO**

MATEMATICO → **CUASI ANALITICO**

MATEMATICO → **NUMERICO**

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z}\right)=S_S \cdot \frac{\partial h}{\partial t}}$$



INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

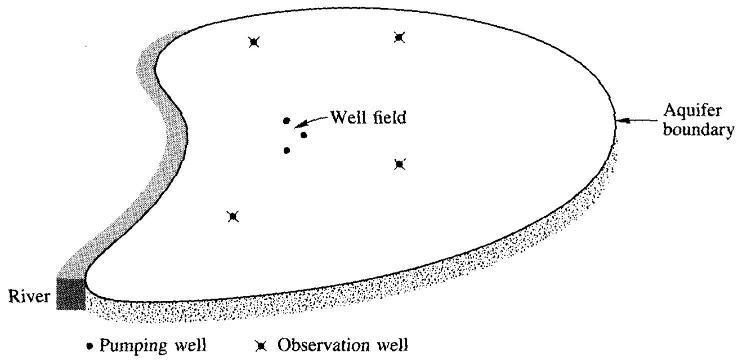
SOLUCION NUMERICA

- **IMPLEMENTACION**
- **CONDICIONES DE BORDE**

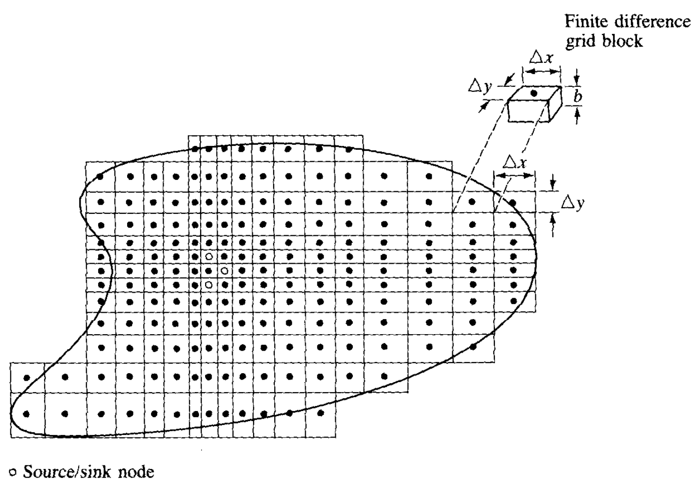
METODOS DE SOLUCION

- **DIRECTO**
- **INDIRECTO O ITERATIVO**

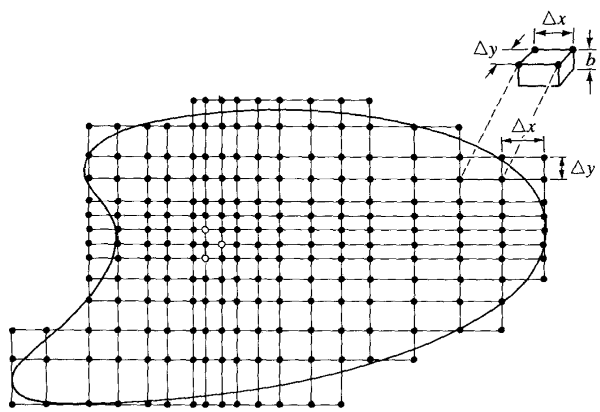
EJEMPLO



MODELO CONCEPTUAL

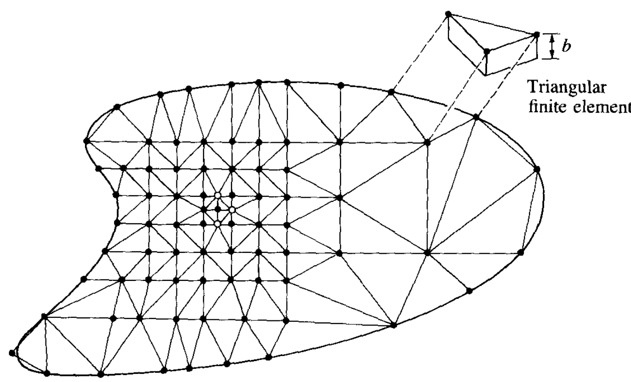


MALLA DIFERENCIAS FINITAS CENTRADA EN ELEMENTO



○ Source/sink node

MALLA DIFERENCIAS FINITAS CON NODO EN VERTICE



○ Source/sink node

MALLA ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES

INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

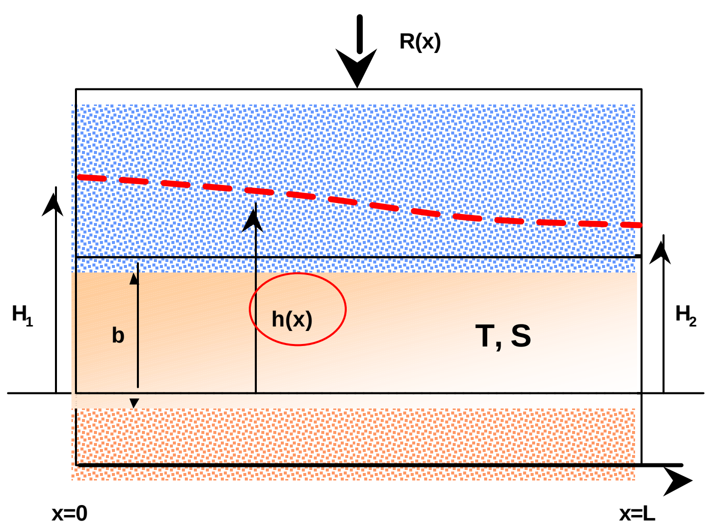
SOLUCION NUMERICA

- IMPLEMENTACION
- CONDICIONES DE BORDE

METODOS DE SOLUCION

- DIRECTO
- INDIRECTO O ITERATIVO

EJEMPLO



Utilizando la ley de Darcy podemos desarrollar la ecuación de balance de masas en 1D para escribir:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) = S \cdot \frac{\partial h}{\partial t}}$$

En el caso de incorporar una recarga sobre la parte superior del suelo se tiene la siguiente ecuación:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) = S \cdot \frac{\partial h}{\partial t} - R(x)}$$

Si consideramos ahora una situación de régimen permanente se puede escribir:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) = -R(x)}$$

PROBLEMA TIPO

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) = -R(x)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{h(x=0) = H_1} \\ \boxed{h(x=L) = H_2} \end{array}\right\} \text{CONDICIONES DE BORDE}$$

INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

SOLUCION NUMERICA

- IMPLEMENTACION
- CONDICIONES DE BORDE

METODOS DE SOLUCION

- DIRECTO
- INDIRECTO O ITERATIVO

EJEMPLO

PROBLEMA TIPO

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \cdot b \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) = -R(x)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{h(x=0)=H_1} \\ \boxed{h(x=L)=H_2} \end{array}\right\} \text{CONDICIONES DE BORDE}$$

Si consideramos que la conductividad hidráulica, K_X, el espesor del acuífero, b, y la recarga, R, son constantes en el espacio:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(T\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\right)=-R}$$

Lo que se puede escribir con diferenciales totales como:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(T\cdot\frac{dh}{dx}\right)=-R}$$

Integrando una vez se tiene:

$$\boxed{T\cdot\frac{dh}{dx}=-R\cdot x+c_1}$$

Reordenando se tiene:

$$\boxed{\frac{dh}{dx}=-\frac{R}{T}\cdot x+c_1}$$

Lo que se puede integrar nuevamente para obtener:

$$\boxed{h(x)=-\frac{R}{T}\cdot\frac{x^2}{2}+c_1\cdot x+c_2}$$

Incorporando las condiciones de borde:

$$\boxed{h(x=0)=-\frac{R}{T}\cdot\frac{0^2}{2}+c_1\cdot 0+c_2} \Rightarrow \boxed{H_1=c_2}$$

$$\boxed{h(x=L)=-\frac{R}{T}\cdot\frac{L^2}{2}+c_1\cdot L+c_2} \Rightarrow \boxed{H_2=-\frac{R}{T}\cdot\frac{L^2}{2}+c_1\cdot L+c_2}$$

Resolviendo para c_1 y c_2 se tiene:

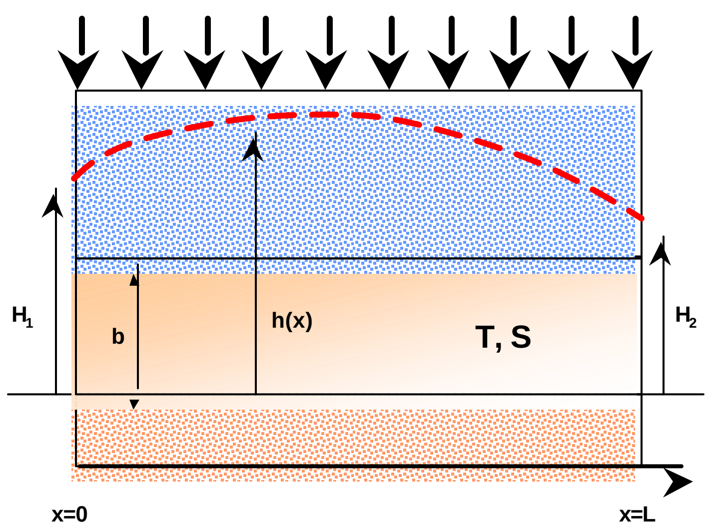
$$\boxed{c_2 = H_1}$$

$$\boxed{c_1 = \frac{H_2 - H_1}{L} + \frac{R \cdot L}{2 \cdot T}}$$

Finalmente podemos reemplazar las constantes para obtener:

$$\boxed{h(x) = -\frac{R}{T} \cdot \frac{x^2}{2} + \left(\frac{H_2 - H_1}{L} + \frac{R \cdot L}{2 \cdot T} \right) \cdot x + H_1}$$

$$\boxed{h(x) = H_1 + \frac{H_2 - H_1}{L} \cdot x + \frac{R}{2 \cdot T} \cdot x \cdot (L - x)}$$



$$\boxed{h(x) = H_1 + \frac{H_2 - H_1}{L} \cdot x + \frac{R}{2 \cdot T} \cdot x \cdot (L - x)}$$

INTRODUCCION
MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION
DERIVACION PROBLEMA TIPO
SOLUCION ANALITICA
SOLUCION NUMERICA
- IMPLEMENTACION
- CONDICIONES DE BORDE

METODOS DE SOLUCION
- DIRECTO
- INDIRECTO O ITERATIVO

EJEMPLO

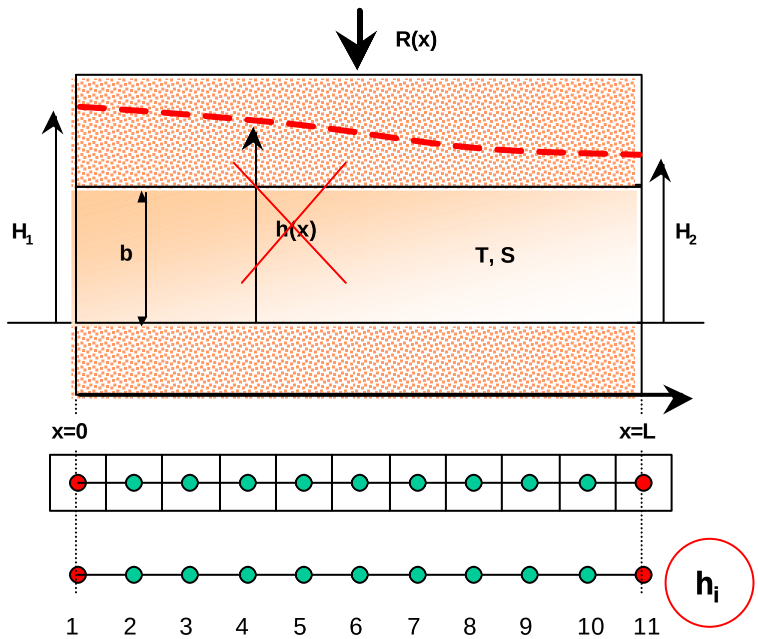
PROBLEMA TIPO

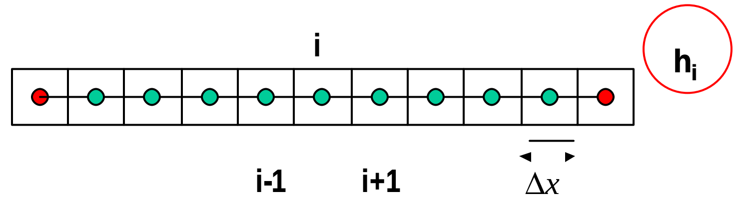
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(T\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\right)=-R} \Rightarrow \boxed{T\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)=-R}$$

$$\boxed{T\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=-R}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{h(x=0)=H_1}\\ \boxed{h(x=L)=H_2}\end{array}\right\}$$

CONDICIONES DE BORDE





$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_i$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_i \cong \frac{h_{i+1}-h_i}{\Delta x}}$$

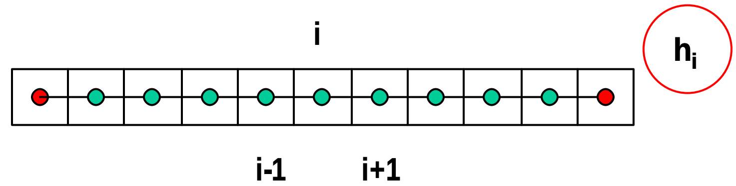
Aproximación hacia adelante

$$\boxed{\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_i \cong \frac{h_i-h_{i-1}}{\Delta x}}$$

Aproximación hacia atrás

$$\boxed{\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_i \cong \frac{h_{i+1}-h_{i-1}}{2\cdot\Delta x}}$$

Aproximación central



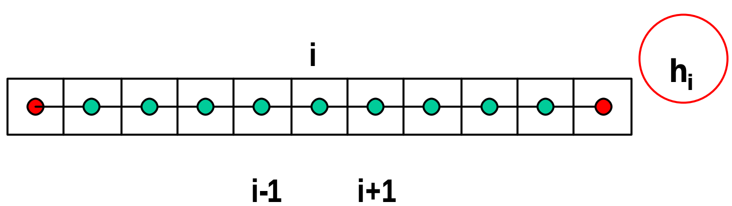
$$\left.\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right|_i = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i \cong \frac{\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_i - \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{i-1}}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{h_{i+1}-h_i}{\Delta x}\right)-\left(\frac{h_i-h_{i-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right|_i = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_i \cong \frac{h_{i-1}-2\cdot h_i + h_{i+1}}{\Delta x^2}$$

PROBLEMA TIPO

$$T\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -R$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{R}{T} \Rightarrow \frac{h_{i-1}-2\cdot h_i + h_{i+1}}{\Delta x^2} \cong -\frac{R}{T}$$



INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

SOLUCION NUMERICA

IMPLEMENTACION

CONDICIONES DE BORDE

METODOS DE SOLUCION

DIRECTO

INDIRECTO O ITERATIVO

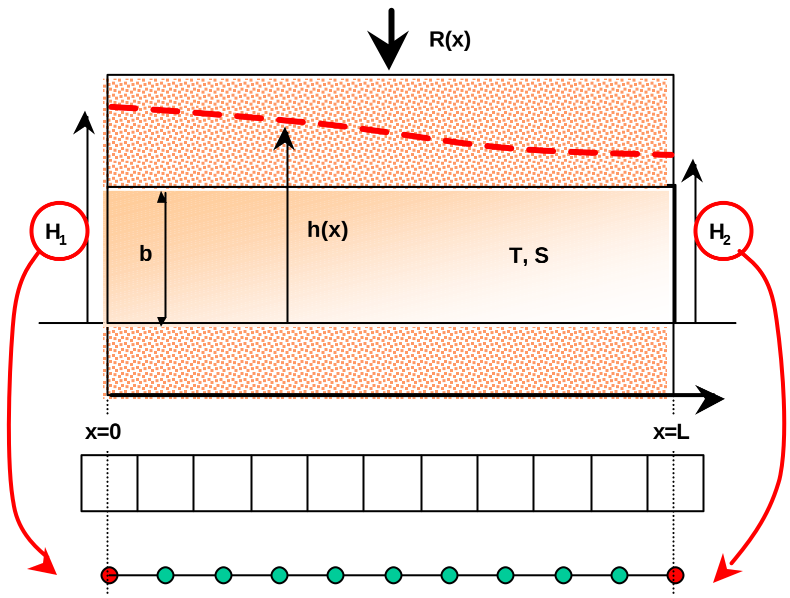
EJEMPLO

DIRICHLET

Condición de borde de primer tipo. Corresponde al valor de la variable de estado que es conocida en algún sector de la zona modelada. Esto se traduce como nudos de la malla con información conocida.

$$\boxed{h(x = x_0) = h_0}$$

$$\boxed{h_i = h_0}$$



INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

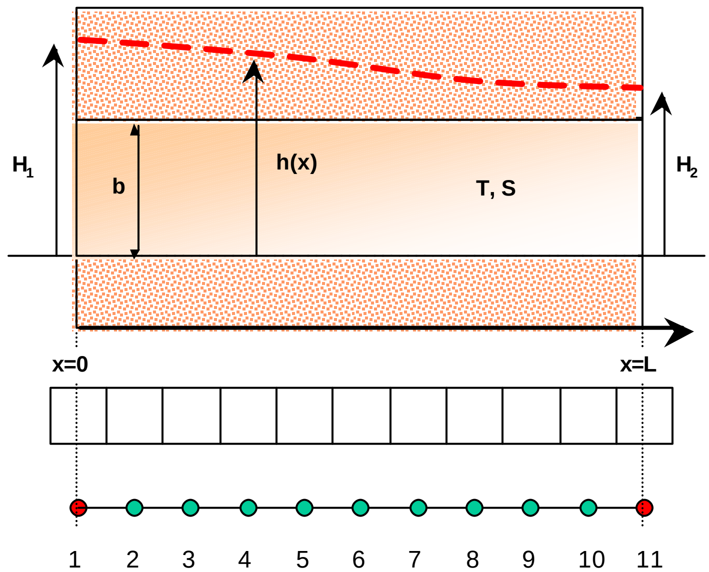
SOLUCION NUMERICA

- IMPLEMENTACION
- CONDICIONES DE BORDE

METODOS DE SOLUCION

- DIRECTO
- INDIRECTO O ITERATIVO

EJEMPLO

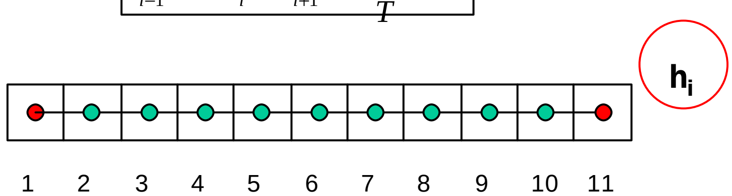


PROBLEMA TIPO

$$\boxed{T \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -R}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{R}{T}} \Rightarrow \boxed{\frac{h_{i-1} - 2 \cdot h_i + h_{i+1}}{\Delta x^2} \cong -\frac{R}{T}}$$

$$\boxed{h_{i-1} - 2 \cdot h_i + h_{i+1} \cong -\frac{R}{T} \cdot \Delta x^2}$$



MODELO NUMERICO

Existen dos formas de resolver este problema (es decir determinar el valor de h_i para i desde 1 hasta 11).

ENFOQUE DIRECTO

Construir un sistema de ecuaciones utilizando la aproximación escrita anteriormente.

ENFOQUE INDIRECTO O ITERATIVO

Utilizar la aproximación anterior para desarrollar un esquema de cálculo iterativo.

ENFOQUE DIRECTO:

Para nudos 2 al 10 se tiene:

2 $\boxed{h_1 - 2\cdot h_2 + h_3 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

3 $\boxed{h_2 - 2\cdot h_3 + h_4 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

4 $\boxed{h_3 - 2\cdot h_4 + h_5 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

5 $\boxed{h_4 - 2\cdot h_5 + h_6 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

6 $\boxed{h_5 - 2\cdot h_6 + h_7 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

7 $\boxed{h_6 - 2\cdot h_7 + h_8 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

8 $\boxed{h_7 - 2\cdot h_8 + h_9 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

9 $\boxed{h_8 - 2\cdot h_9 + h_{10} \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

10 $\boxed{h_9 - 2\cdot h_{10} + h_{11} \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

$$\boxed{h_{i-1} - 2\cdot h_i + h_{i+1} \cong -\frac{R}{T}\cdot\Delta x^2}$$

ENFOQUE DIRECTO:

Para nudos 1 y 11 se tiene:

1 $\boxed{h_1 = H_1}$

2 $\boxed{h_1 - 2\cdot h_2 + h_3 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

3 $\boxed{h_2 - 2\cdot h_3 + h_4 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

4 $\boxed{h_3 - 2\cdot h_4 + h_5 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

5 $\boxed{h_4 - 2\cdot h_5 + h_6 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

6 $\boxed{h_5 - 2\cdot h_6 + h_7 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

7 $\boxed{h_6 - 2\cdot h_7 + h_8 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

8 $\boxed{h_7 - 2\cdot h_8 + h_9 \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

9 $\boxed{h_8 - 2\cdot h_9 + h_{10} \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

10 $\boxed{h_9 - 2\cdot h_{10} + h_{11} \cong -R\cdot\Delta x^2/T}$

11 $\boxed{h_{11} = H_2}$

$$\boxed{h_1 = H_1}$$

$$\boxed{h_{11} = H_2}$$

ENFOQUE DIRECTO:

Al combinar todas las ecuaciones se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \\ h_9 \\ h_{10} \\ h_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ -R\cdot\Delta x^2/T \\ H_2 \end{Bmatrix}$$

Al resolver se obtiene una solución para {h}.

ENFOQUE DIRECTO:

Al combinar los N nudos y escribir el problema en términos o forma matricial se tendrá un sistema del tipo:

$$\boxed{[A]\cdot\{h\}=\{b\}}$$

Si se invierte la matriz A se obtiene una solución para la variable de estado h:

$$\boxed{\{h\}=[A]^{-1}\cdot\{b\}}$$

INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

SOLUCION NUMERICA

- **IMPLEMENTACION**
- **CONDICIONES DE BORDE**

METODOS DE SOLUCION

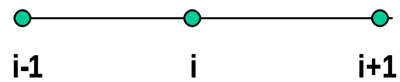
- **DIRECTO**
- **INDIRECTO O ITERATIVO**

EJEMPLO

ENFOQUE INDIRECTO O ITERATIVO:

Se toma la expresión general para generar un algoritmo de convergencia.

$$h_{i-1} - 2 \cdot h_i + h_{i+1} = -\frac{R}{T} \cdot \Delta x^2$$



$$h_i = \frac{1}{2} \cdot \left(h_{i-1} + h_{i+1}\right) + \frac{R \cdot \Delta x^2}{2 \cdot T}$$

ENFOQUE INDIRECTO O ITERATIVO:

JACOBI

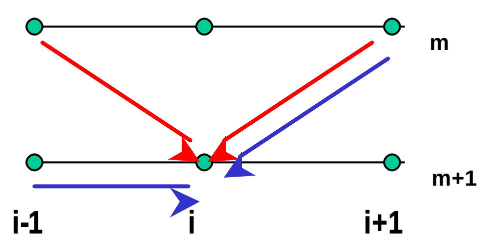
$$h_i^{m+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(h_{i-1}^{m} + h_{i+1}^{m}\right) + \frac{R \cdot \Delta x^2}{2 \cdot T}$$

GAUSS-SEIDEL

$$h_i^{m+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(h_{i-1}^{m+1} + h_{i+1}^{m}\right) + \frac{R \cdot \Delta x^2}{2 \cdot T}$$

$$h_i^0 = 0 \qquad \forall\, i$$

$$h_1 = H_1 \qquad\qquad h_{11} = H_2$$



ENFOQUE INDIRECTO O ITERATIVO:

	NUDOS										
ITER	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
0	20.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	20.0
1	20.0	10.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	10.1	20.0
2	20.0	10.2	5.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	5.2	10.2	20.0
3	20.0	12.7	5.3	2.8	0.3	0.3	0.3	2.8	5.3	12.7	20.0
4	20.0	12.7	7.9	2.9	1.7	0.4	1.7	2.9	7.9	12.7	20.0
5	20.0	14.0	7.9	4.9	1.7	1.8	1.7	4.9	7.9	14.0	20.0
6	20.0	14.1	9.5	4.9	3.4	1.8	3.4	4.9	9.5	14.1	20.0
7	20.0	14.9	9.6	6.6	3.5	3.5	3.5	6.6	9.6	14.9	20.0
8	20.0	14.9	10.8	6.6	5.1	3.6	5.1	6.6	10.8	14.9	20.0
9	20.0	15.5	10.9	8.1	5.2	5.2	5.2	8.1	10.9	15.5	20.0
10	20.0	15.5	11.9	8.1	6.8	5.3	6.8	8.1	11.9	15.5	20.0
11	20.0	16.0	11.9	9.4	6.8	6.9	6.8	9.4	11.9	16.0	20.0
12	20.0	16.1	12.8	9.5	8.2	6.9	8.2	9.5	12.8	16.1	20.0
13	20.0	16.5	12.9	10.6	8.3	8.3	8.3	10.6	12.9	16.5	20.0
14	20.0	16.5	13.7	10.7	9.6	8.4	9.6	10.7	13.7	16.5	20.0
15	20.0	16.9	13.7	11.7	9.6	9.7	9.6	11.7	13.7	16.9	20.0
16	20.0	17.0	14.4	11.8	10.8	9.7	10.8	11.8	14.4	17.0	20.0
17	20.0	17.3	14.5	12.7	10.9	10.9	10.9	12.7	14.5	17.3	20.0
18	20.0	17.3	15.1	12.8	11.9	11.0	11.9	12.8	15.1	17.3	20.0
19	20.0	17.7	15.2	13.6	12.0	12.0	12.0	13.6	15.2	17.7	20.0
20	20.0	17.7	15.7	13.7	12.9	12.1	12.9	13.7	15.7	17.7	20.0

T_2

INTRODUCCION

MALLA O GRILLA DE DISCRETIZACION

DERIVACION PROBLEMA TIPO

SOLUCION ANALITICA

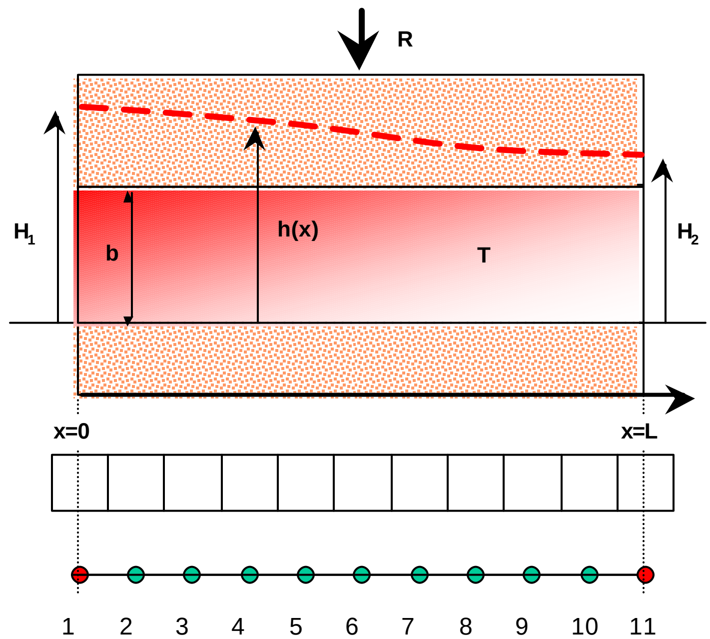
SOLUCION NUMERICA

- **IMPLEMENTACION**
- **CONDICIONES DE BORDE**

METODOS DE SOLUCION

- **DIRECTO**
- **INDIRECTO O ITERATIVO**

EJEMPLO



NUDOS 2 A 10

JACOBI

$$\boxed{h_i^{m+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(h_{i-1}^{m} + h_{i+1}^{m}\right) + \frac{R\cdot\Delta x^2}{2\cdot T}}$$

GAUSS-SEIDEL

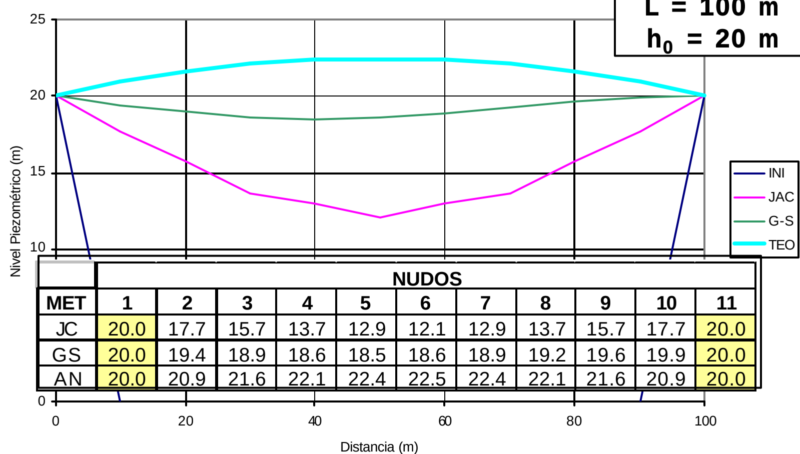
$$\boxed{h_i^{m+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(h_{i-1}^{m+1} + h_{i-1}^{m}\right) + \frac{R\cdot\Delta x^2}{2\cdot T}}$$

NUDOS 1 Y 11

$$\boxed{h_1 = H_1} \qquad \boxed{h_{11} = H_2}$$

Comparación Entre Métodos
20 Iteraciones

R = 0.1 m/día
T = 50 m²/día
L = 100 m
h_0 = 20 m

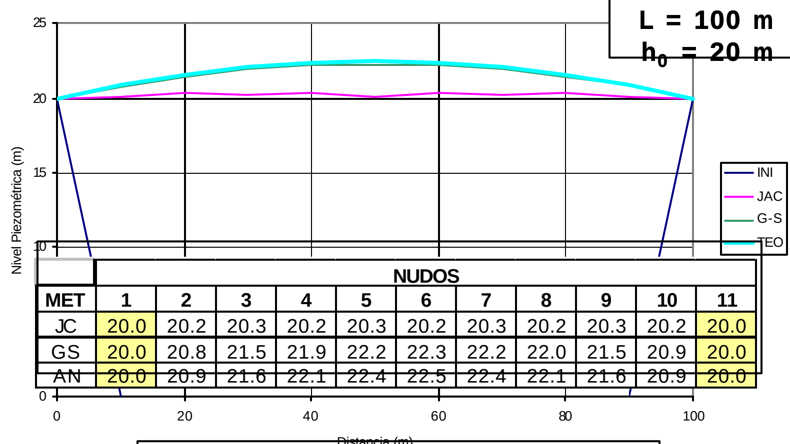


	NUDOS										
MET	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
JC	20.0	17.7	15.7	13.7	12.9	12.1	12.9	13.7	15.7	17.7	20.0
GS	20.0	19.4	18.9	18.6	18.5	18.6	18.9	19.2	19.6	19.9	20.0
AN	20.0	20.9	21.6	22.1	22.4	22.5	22.4	22.1	21.6	20.9	20.0

$$h(x) = H_1 + \frac{H_2 - H_1}{L} \cdot x + \frac{R}{2 \cdot T} \cdot x \cdot (L - x)$$

Comparación entre Métodos
50 Iteraciones

R = 0.1 m/día
T = 50 m²/día
L = 100 m
h_0 = 20 m



	NUDOS										
MET	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
JC	20.0	20.2	20.3	20.2	20.3	20.2	20.3	20.2	20.3	20.2	20.0
GS	20.0	20.8	21.5	21.9	22.2	22.3	22.2	22.0	21.5	20.9	20.0
AN	20.0	20.9	21.6	22.1	22.4	22.5	22.4	22.1	21.6	20.9	20.0

$$h(x) = H_1 + \frac{H_2 - H_1}{L} \cdot x + \frac{R}{2 \cdot T} \cdot x \cdot (L - x)$$