Resumen Control 5

Sección 5

Queremos calcular el área bajo una curva f(x) entre a y b.

Sea $P = \{x_i\}_{i=1}^n$, se hacen dos aproximaciones:

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \longleftrightarrow \text{suma inferior}$$

$$m_i(f) = inf\{f(x)/x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \longleftrightarrow \text{suma superior}$$

$$M_i(f) = sup\{f(x)/x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Definición: f se dirá Riemann integrable si

$$\sup_{P \in \mathbf{P}_{[a,b]}} s(f,P) = \inf_{P \in \mathbf{P}_{[a,b]}} S(f,P) := \int_a^b f(x)dx$$

Propiedad:

$$s(f,P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(f,P)$$

Propiedad: f definida y acotada en un intervalo $[a,b]$ será Riemann integrable ssi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists P \in \mathbf{P}_{[a,b]}) \qquad S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

Teorema Si f es una función continua en $[a,b]$ entonces es integrable en $[a,b]$

Corolario Si f es una función continua en $[a,b]$ entonces:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathbf{P}_{[a,b]})$$

tal que

$$|P| < \delta \Rightarrow \Big| \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x_i})(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx \Big| < \varepsilon$$

donde cada $\bar{x_i}$ es un número arbitrario en $[x_{i-1}, x_i]$

Teorema Fundamental del Cálculo
Sea $G(t) = \int_a^t f(x)dx$ Si $f(x)$ es continua en $[a,t]$ entonces $G(t)$ es diferenciable en $[a,t]$ y se tiene que $G'(t) = f(t)$

Corolario

$$H(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x)dx$$

$$\Rightarrow H'(t) = f(\beta(t))\beta'(t) - f(\alpha(t))\alpha'(t)$$

Integración por partes
Teorema
Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo I y derviables en $Int(I)$. Sean $a, b \in int(I)$. Si f' y g' son continuas entonces

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Cambio de Variable
Teorema Sea g una función continua en el intervalo I y derivable en $int(I)$, con g' continua. Sean $a, b \in int(I)$, con $a < b$. Sea f una función continua en $g([a,b])$, entonces

$$\int_a^b (f \circ g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

Valor Medio para Integrales
Teorema Si f es continua en $[a,b]$, y g es una función integrable en [a,b] que no cambia de signo, entonces $\exists \xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g dx$$

Teorema de Taylor con resto integral

Si $f \in C^{n+1}$ en una vecindad que contiene al punto x_0 entonces:

$$f(x) = P_n^{x_0}(x) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

done $P_n^{x_0}(x)$ corresponde al polinomio de Taylor en torno a x_0

Coordenadas paramétricas
Recordar que $y = f(x)$ puede ponerse en forma paramétrica si $x = x(t)$, $y = y(t)$, además $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

Area bajo la curva

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

Mantos de un sólido de revolución

- Rotación OX:

$$S_{OX} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

- Rotación OX en coordenadas paramétricas:

$$S_{OX} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)}dt$$

- Rotación OY:

$$S_{OY} = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}dx$$

- Rotación OY en coordenadas paramétricas:

$$S_{OX} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)}dt$$

Longitud de arco

- $$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$$

- En coordenadas paramétricas:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

- En coordenadas polares:

$$L = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\rho(\phi)^2 + (\rho'(\phi)^2)}d\phi$$

Volumen de un sólido de revolución

- En torno al eje OX

$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

- Coordenadas Paramétricas

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)x'(t)dt$$

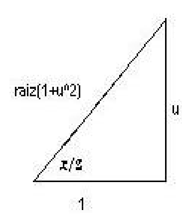
- En torno al eje OY

$$V = 2\pi \int_a^b f(x)xdx$$

- Coordenadas Paramétricas

$$V = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)x'(t)dt$$

Cambio de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$
$u = \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow du = \sec^2(\frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\cos^2(\frac{x}{2})}$



Además mirando el dibujo se deduce que:
$\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ $\quad \sin(\frac{x}{2}) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$
Recordemos que,
$\sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$, $\cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})$
Reemplazando se obtiene
$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2du}{1+u^2}$