Complemento Clase Auxiliar 26-08

Profesor auxiliar: Roberto Cortez

Problema: sea $f :]a, b[\longrightarrow I\!R$ una función 2 veces derivable. Demuestre que f es convexa si y sólo si $\forall x_0 \in]a, b[$ la recta tangente a f en x_0 va por debajo de f, es decir

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in]a, b[$$

Solución:

($\Rightarrow$) Debemos probar que si f es convexa entonces para todo x_0 la recta tangente a f en x_0 va por debajo de f. Razonemos por contradicción: supongamos que para un cierto x_0 la recta no va por debajo de f, es decir, existe x tal que

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Supongamos que $x > x_0$. Pasando $f(x_0)$ hacia el otro lado y dividiendo por $x - x_0$ (que es mayor que cero, por lo cual no cambia la desigualdad) se obtiene

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0)$$

Por TVM existe un cierto $\xi \in]x_0, x[$ tal que el lado izquierdo es igual a la derivada de f en ξ, con lo que se llega a

$$f'(\xi) < f'(x_0)$$

Pasando todo al lado izquierdo y dividiendo por $\xi - x_0$ (que también es mayor que cero) se obtiene

$$\frac{f'(\xi) - f'(x_0)}{\xi - x_0} < 0$$

Aplicando el TVM a la función f', obtenemos la existencia de un cierto $\bar{\xi} \in]x_0, \xi[$ tal que $f''(\bar{\xi})$ es igual al lado izquierdo de lo anterior. Así, se cumple

$$f''(\bar{\xi}) < 0 \tag{1}$$

lo cual contradice la convexidad de f (recordemos que cuando f es convexa y dos veces derivables entonces entonces $f''(x) \geq 0 \ \forall x$).

Para el caso en que $x < x_0$ el desarrollo es análogo: la desigualdad (1) no se mantendrá pues en el desarrollo hay que multiplicar DOS VECES por $x - x_0$, luego la desigualdad cambia la primera vez, pero la segunda vez vuelve a ser la original.

($\Leftarrow$) Ahora debemos probar la implicancia contraria, es decir, suponemos que para todo x_0 la recta tangente a f en x_0 va por debajo de f y debemos probar que f es convexa. Nuevamente razonamos por contradicción: supongamos que f no es convexa, es decir, que existe un cierto punto donde la segunda derivada de f es estrictamente menor que 0. Llamemos x_0 a este punto, es decir, $f''(x_0) < 0$. Hagamos un desarrollo de segundo orden de f en torno a x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2/2 + o((x - x_0)^2)$$

Pasando los dos primeros terminos de la derecha hacia el otro lado y dividiendo por $(x-x_0)^2$ llegamos a que

$$\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = f''(x_0)/2 + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} \tag{2}$$

Por definición de la función $o(h^2)$ se tiene que

$$\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } x \to x_0$$

Luego, para x suficientemente cercano a x_0 se tiene que $o((x-x_0)^2)/(x-x_0)^2$ es tan chico como uno quiera, en particular, más chico que $-f''(x_0)/4$ (que es mayor que cero). Por lo tanto, para un cierto $\bar{x}$ suficientemente cercano a x_0 se cumple que

$$f''(x_0)/2 + \frac{o((\bar{x}-x_0)^2)}{(\bar{x}-x_0)^2} \leq f''(x_0)/2 - f''(x_0)/4 = f''(x_0)/4 < 0$$

Así, ocupando lo anterior en la ecuación (2) obtenemos que

$$\frac{f(\bar{x})-f(x_0)-f'(x_0)(\bar{x}-x_0)}{(\bar{x}-x_0)^2} < 0$$

O equivalentemente

$$f(\bar{x}) < f(x_0) + f'(x_0)(\bar{x}-x_0)$$

lo cual contradice nuestra hipótesis de que la recta tangente en x_0 va por debajo de f.

□