

CÁLCULO – MA12A

Profesor : Joaquín Fontbona

Auxiliares : Mauricio Duarte
Cristian Figueroa

PROBLEMA 1

(a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{n+i}{2n^2+ni}$ reconociendo en el término general una suma de Riemann.

(b) Sea $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente

(i) Usando la partición $P = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=2}^n f(i) \quad \forall n \geq 2$$

(ii) Considere $f(x) = Ln x$ y utilice la parte anterior para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n! \quad \forall n \geq 1$$

Solución. Primero tratemos de armar un término general que parezca un término de una suma de Riemann:

$$\frac{n+i}{2n^2+ni} = \frac{1}{n^2} \frac{n+i}{2+i/n} = \left[\frac{1+i/n}{2+i/n} \right] \frac{1}{n}$$

Si consideramos la partición del intervalo $P_{[0,1]} = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ y la función $f(x) = \frac{1+x}{2+x} = 1 - \frac{1}{2+x}$, que es continua en $[0, 1]$, entonces la suma anterior corresponde a una suma superior de Riemann:

$$\sum_{i=1}^n \frac{n+i}{2n^2+ni} = S(f, P_{[0,1]}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 1 - \frac{1}{2+x} dx = 1 - Ln(2+x) \Big|_0^1 = 1 + Ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

(b) $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, \infty)$.

(i) Como f es creciente, en el intervalo $[a, b]$, $\min\{f(x)\} = f(a)$ y $\max\{f(x)\} = f(b)$. Por ser creciente, en el intervalo $[0, n]$ la función f es acotada y luego integrable de manera que, usando la partición P indicada, como $\Delta x = 1$:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n-1} \min_{x \in [i, i+1]} f(x) \leq \int_1^n f(x) dx \leq S(f, P) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \max_{x \in [i, i+1]} f(x) \quad \forall n \geq 2$$

Esto es:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i+1) = \sum_{i=2}^n f(i) \quad \forall n \geq 2$$

(ii) Para $f(x) = Ln x$ tenemos

$$\checkmark \sum_{i=1}^{n-1} f(i) = \sum_{i=1}^{n-1} Ln i = Ln \prod_{i=1}^{n-1} i = Ln (n-1)!$$

$$\checkmark \int_1^n f(x) dx = \int_1^n Ln x dx = [x Ln x - x]_1^n = n Ln n - n - Ln 1 + 1 = Ln(n^n) - (n-1)$$

$$\checkmark \sum_{i=2}^n f(i) = \sum_{i=2}^n Ln i = Ln \prod_{i=2}^n i = Ln n!$$

Aplicando $\exp(\cdot)$ a la desigualdad obtenida en (i):

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!$$

PROBLEMA 2

Sea $s_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n [i\sqrt{n^2 - i^2}]$. Identifique s_n como una suma de Riemann, determinando la función y la partición involucrada. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)$.

Solución.

$$s_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n [i\sqrt{n^2 - i^2}] = \sum_{i=1}^n \left[\frac{i}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2} \right] \frac{1}{n}$$

De manera que si definimos $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$, tenemos una suma de Riemann de la función f sobre una partición equiespaciada del intervalo $[0, 1]$. Como f es continua, es integrable y además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} dx = -\frac{1}{3} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

PROBLEMA 3

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$ talque $f(0) = 0$ y $\forall x \in (0, 1)$, $0 \leq f'(x) \leq 1$. Se pide probar que $\left[\int_0^1 f(t) dt \right]^2 \geq \int_0^1 f(t)^3 dt$, para lo cual proceda como sigue:

- (a) Pruebe que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 0$.
- (b) Se define $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $G(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f(x)^2$. Muestre que $G(x)$ es creciente y deduzca que $\forall x \in [0, 1]$, $G(x) \geq 0$.
- (c) Defina $F(x) = \left[\int_0^x f(t) dt \right]^2 - \int_0^x f(t)^3 dt$. Pruebe que $F'(x) = f(x)G(x)$, establezca el crecimiento de $F(x)$ y deduzca que $\forall x \in [0, 1]$, $F(x) \geq 0$. Concluya.

Solución. Como $f'(x) \geq 0$ entonces f es creciente, luego $\forall x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$. Como f es derivable, entonces es continua, integrable y luego $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ es derivable. También $f(x)^2$ es derivable, luego $G(x)$ es derivable con:

$$G'(x) = 2 \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x))$$

donde se ha usado una versión del teorema fundamental del cálculo. Como $f(x) \geq 0$ y $0 \leq f'(x) \leq 1$ sigue que $G'(x) \geq 0$, luego $G(x)$ es creciente, y de aquí:

$$G(x) \geq G(0) = 2 \int_0^0 f(t) dt - f(0)^2 = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Como antes, $F(\cdot)$ es derivable, y su derivada es:

$$F'(x) = 2 \int_0^x f(t) dt f(x) - f(x)^3 = f(x)G(x) \geq 0$$

pues ambos f y G son positivas. Se concluye que F es creciente y en particular $F(1) \geq F(0)$, esto es:

$$\left[\int_0^1 f(t) dt \right]^2 - \int_0^1 f(t)^3 dt \geq 0$$

de donde se concluye directamente lo que se quería demostrar.

PROBLEMA 4

Sean $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dos funciones continuas. Además se sabe que g es derivable en $(0, 1)$ y satisface las relaciones

$$g(1) < 1, \quad \text{y} \quad 0 \leq g'(x) \leq 1, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Considere ahora la función F definida en $[0, 1]$ por

$$F(x) = 2x - 1 - \int_0^{g(x)} f(t) dt.$$

Para demostrar que F posee un único cero se pide lo siguiente:

- (i) Pruebe que F es continua y que $F(0) < 0 < F(1)$. Concluya que F posee al menos un cero en $[0, 1]$.
- (ii) Pruebe que F es derivable en $(0, 1)$ y que es estrictamente creciente. Deduzca que el cero de F es único.

Solución.

- (i) Como f es integrable, entonces la aplicación $H : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ es continua, más aún, es derivable. Se tiene que $F(x) = 2x - 1 - H \circ g(x)$ es continua por álgebra y composición de funciones continuas. Notemos que $g(x) \geq 0$ y luego:

$$\left| \int_0^{g(x)} f(t) dt \right| \leq \int_0^{g(x)} |f(t)| dt \leq \int_0^{g(x)} 1 dt \leq g(x) < 1$$

La última desigualdad se satisface pues como $g'(x) \geq 0$, entonces $g(x)$ es creciente, luego $\forall x \in [0, 1]$, $g(x) \leq g(1) < 1$. Notar que la desigualdad es estricta.

Finalmente

$$F(0) = -1 - \int_0^{g(0)} f(t) dt \leq -1 + \left| \int_0^{g(0)} f(t) dt \right| < -1 + 1 = 0$$

$$F(1) = 1 - \int_0^{g(1)} f(t) dt \geq 1 - \left| \int_0^{g(1)} f(t) dt \right| > 1 - 1 = 0$$

Luego $F(0) < 0 < F(1)$ y como F es continua, por teorema de valores intermedios $\exists c \in (0, 1)$ tal que $F(c) = 0$.

- (ii) Recordemos que $F(x) = 2x - 1 - H \circ g(x)$. Como H y g son derivables, por regla de la cadena F es derivable con:

$$F'(x) = 2 - H'(g(x))g'(x) = 2 - f(g(x))g'(x)$$

Lo anterior es consistente pues $\text{Rec}(g) \subseteq [0, 1] = \text{Dom}(f)$. Además $1 \geq g'(x) \geq 0$ y también $1 \geq f(g(x)) \geq 0$, luego $f(g(x))g'(x) \leq 1$ lo que implica que $F'(x) \geq 2 - 1 = 1 > 0$ y luego F es estrictamente creciente en $[0, 1]$. En particular es inyectiva y luego puede tener a lo más un cero en $[0, 1]$.