

Clase 1

1. a) Demuestre utilizando los axiomas de cuerpo de los números reales que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ x, y \neq 0, (x + y)(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1} + y^{-1}$$

- b) Demuestre que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ x, y > 0, (x + y)(x^{-1}y^{-1}) \geq 4$$

2. Usando exclusivamente los axiomas de los reales y mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre que:

$$a \in \mathbb{R}, a \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0$$

3. Demuestre que si $x, y, w, z \in \mathbb{R}$ tal que $w \neq 0, z \neq 0$ entonces:

$$(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \lambda w \text{ e } y = \lambda z$$

4. Pruebe que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a^3b + ab^3 \leq a^4 + b^4$$

5. Dada la constante $a > 0$, encuentre el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} < a$$

Indicación: Expresé la solución en función de los distintos valores que puede tomar a .

6. Pruebe que dos reales positivos x e y para los cuales se cumple:

$$\forall b \in \mathbb{R}, b > 1, x < b \cdot y$$

satisfacen la relación $x \leq y$