Forma de Jordan

1) Un bloque de Jordan es una matriz cuadrada de la forma

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Una matriz J se dice que está en forma de Jordan si tiene la forma

$$J = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & B_m \end{bmatrix},$$

donde cada B_i es un bloque de Jordan

Si J está en forma de Jordan los tamaños de los bloques B_i pueden ser distintos o repetirse, y también los valores λ_i que aparecen en cada bloque pueden ser distintos o repetirse.

2) Si A es equivalente a un bloque de Jordan B , es decir $A = PBP^{-1}$ y $v_1, \dots, v_n$ son las columnas de P entonces la relación $A = PBP^{-1}$ es equivalente a las ecuaciones

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda v_1 \\ Av_2 &= \lambda v_2 + v_1 \\ &\vdots \\ Av_n &= \lambda v_n + v_{n-1}. \end{aligned}$$

v_1 es un vector propio de A y λ un valor propio

$v_2, \dots, v_n$ no son vectores propios, y se les llama vectores **propios generalizados** asociados a λ

la multiplicidad algebraica de λ es n, ya que la matriz A tiene los mismos valores propios que B, mientras que la multiplicidad geométrica de λ es 1.

Por lo tanto, si $n > 1$ la matriz A no es diagonalizable.

3) Una observación análoga se puede hacer cuando A es equivalente a J en forma de Jordan. Supongamos por simplicidad que

$$A = PJP^{-1}$$

donde

$$J = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix},$$

y B_1, B_2 son bloques de Jordan asociados a valores λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ de dimensiones $n \times n$ y $m \times m$ respectivamente. Escribamos P de la forma

$$P = [v_1, \ldots v_n, w_1, \ldots w_m].$$

Entonces $A = PJP^{-1}$ es equivalente a

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1, & Av_j &= \lambda_1 v_j + v_{j-1} \quad 2 \leq j \leq n \\ Aw_1 &= \lambda_2 w_1, & Aw_j &= \lambda_2 w_j + w_{j-1} \quad 2 \leq j \leq m \end{aligned}$$

y observamos que v_1 es vector propio con valor propio λ_1, w_1 es vector propio con valor propio λ_2, mientras que $v_2, \ldots, v_n$, $w_2, \ldots, w_m$ son vectores propios generalizados.

En este ejemplo podemos además podemos afirmar lo siguiente:

- si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces λ_1 tiene multiplicidad algebraica n y multiplicidad geométrica 1, y λ_2 tiene multiplicidad algebraica m y geométrica 1.
- si $\lambda_1 = \lambda_2$ entonces este es un valor propio con multiplicidad algebraica $n + m$ y geométrica 2.

4) **Teorema 1** *Toda matriz A de $n \times n$ es equivalente a una matriz de Jordan, es decir, existen J en forma de Jordan y P de $n \times n$ invertible tales que*

$$A = PJP^{-1}.$$

La descomposición es única en el sentido siguiente: si A es equivalente a matrices en forma de Jordan J_1 y J_2 entonces

- *el número de bloques asociado a un valor propio λ es el mismo para J_1 y J_2,*

- *si $B_1, \ldots, B_k$ son todos los bloques de Jordan de J_1 asociados a λ y $E_1, \ldots, E_k$ son los bloques de J_2 asociados a λ y los ordenamos de modo que*

$$dimB_1 \leq dimB_2 \leq \ldots \leq dimB_k$$
$$dimE_1 \leq dimE_2 \leq \ldots \leq dimE_k,$$

entonces $B_1 = E_1, \ldots, B_k = E_k$.

Observación. Notemos que una matriz A es diagonalizable si y solo si todos los bloques en su forma de Jordan son de tamaño 1.

5) **Un método para encontrar la forma de Jordan**

Obs: No funciona en general.

Primero encontramos los valores y vectores propios de A. Si la multiplicidad geométrica de un valor propio λ es menor que la algebraica intentamos encontrar vectores propios generalizados asociados a λ resolviendo

$$Aw = \lambda w + v \tag{1}$$

donde w es la incógnita y v es un vector propio asociado al valor propio λ.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Un cálculo muestra que los valores propios son 2 (mult. alg. 1) y 6 (mult. alg. 2). Encontremos los vectores propios asociados a 2 resolviendo $(A - 2I)x = 0$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

y obtenemos $v_1 = [1, 2, 1]$. Análogamente buscamos el o los vectores propios asociados a 6 resolviendo $(A - 6I)x = 0$:

$$\begin{matrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

y obtenemos el vector propio $w_1 = [1, 0, -1]$. Observemos que 6 tiene multiplicidad algebraica 2 y geométrica 1, por lo que A no es diagonalizable. Buscamos entonces un vector propio generalizado w_2 asociado a 6 resolviendo $(A - 6I)w_2 = w_1$

$$\begin{array}{cccccc} -2 & 0 & -2 & | & 1 \\ -2 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & -1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccccc} -2 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & -2 & 0 & | & -1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccccc} -2 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}$$

encontramos $w_2 = [-1/2, 1/2, 0]$

6) Aplicaciones de formas de Jordan:

- calcular A^k comenzando por bloques de Jordan
- $p(A) = 0$ donde p es el polinomio característico de A
- $det(A)$ es el producto de los valores propios
- $traza(A)$ es la suma de valores propios