Queremos demostrar:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Para ello, probaremos algo más general:

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{2n}{p} \quad \forall p \leq 2n$$

que con $p = n$, es la expresión buscada. En donde convendremos $\binom{a}{b} = 0$, si $b > a$.

Recurriremos a una técnica mayormente usada en combinatoria que consiste en lo siguiente: Se tiene una expresión que depende de un índice p, para la cual hay que demostrar alguna igualdad o bucar una fórmula más explícita. Se construye una llamada *función generadora*, la cual es una suma de potencias de una variable (x), multiplicadas por coeficientes indexados por la potencia respectiva, de manera que el coeficiente multiplicando a la potencia p, sea la expresión buscada.

En casos generales, dichas funciones corresponden a sumas infinitas (series), pero acá nos limitaremos a trabajar con sumas finitas (polinomios).

Veamos la definición y algunas propiedades útiles de polinomios.

Definición 1. *Se denomina* polinomio de grado n en la variable x, *a una función:*

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{aligned}$$

en donde $n \in \mathbb{N}$ *y* $a_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \{0, \dots, n\}$

El siguiente teorema nos dice algo intuitivo, que dos polinomios de igual grado son iguales (como funciones) si y sólo todos sus coeficientes son iguales.

Teorema 1. *Sean* p, q *dos polinomios de grado* n *en la variable* x, *digamos* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *y* $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$. *Se tiene que* $p = q$ *(como funciones de* x*) ssi* $a_i = b_i$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$.

Demostración. Asumiremos este teorema por ahora, más adelante en el curso será probado. □

Finalmente, veamos la siguiente propiedad de la multiplicación de polinomios.

Proposición 1. *Sean p, q como en el teorema 1. Se tiene que:*

$$pq = \sum_{k=0}^{2n} c_k x^k$$

con $c_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$, *para cada* $k \in \{0, \ldots, 2n\}$, *en donde convendremos que* $a_i = b_i = 0$, $\forall i > n$.

Demostración. Usamos inducción en n.

Para n=0, el resutado es trivial. Sea entonces $n > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, veamos:

$$pq(x) = p(x)q(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + a_n x^n\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j + b_n x^n\right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j\right) + a_n b_n x^{2n} + \sum_{i=0}^{n-1} b_n a_i x^{n+i} + \sum_{j=0}^{n-1} a_n b_j x^{n+j}$$

aplicamos la hipótesis inductiva en el primer término y hacemos cambio de índice en los dos últimos, obteniendo

$$= \sum_{k=0}^{2(n-1)} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k + a_n b_n x^{2n} + \sum_{i=n}^{2n-1} a_{i-n} b_n x^i + \sum_{j=n}^{2n-1} a_n b_{j-n} x^j$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k + a_n b_n x^{2n} + \sum_{k=n}^{2n-1} (a_{k-n} b_n + a_n b_{k-n}) x^k \tag{0.1}$$

Ahora, como en la primera suma, por la convención adoptada, $a_i = b_i = 0$, $\forall i > n-1$, los términos de la tercera suma son exactamente los que faltan, para $k = n$, en la primera. Además, manteniendo la convención $a_i = b_i = 0$, $\forall i > n$, se tiene que:

$$\sum_{i=0}^{2n-1} a_i b_{2n-1-i} = a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}$$

En consecuencia, 0.1 queda:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k + a_n b_n x^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) x^k$$

nuevamente por la convención, ya que gracias a ésta

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i b_{2n-i} = a_n b_n$$

obteniéndose así el resultado. $\square$

Nota. La demostración quizás no es muy explícita y puede dar la sensación de que la convención tantas veces nombrada es el "truco en el que se basa. Sin embargo si la revisan con cuidado, se convencerán. Como ejercicio (no formal), les sugiero pensar qué pasa en el caso de que, en vez de polinomios, consideramos sumas infinitas.

Ahora, veamos la demostación del resultado inicial. Definimos el polinomio p, de la siguente manera:

$$p(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Gracias a la proposición 1, tenemos que:

$$p^2(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n}{k-i} \right) x^k$$

Por otra parte, gracias a la fórmula del binomio de Newton

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = (1+x)^n$$

$$\Rightarrow p^2(x) = (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k}$$

Así:

$$\sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n}{k-i} \right) x^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego, tenemos dos polinomios, los cuales coinciden en todo $x \in \mathbb{R}$. Por teorema 1 se tendrá:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{2n}{k} \quad \forall k \leq 2n$$

y se demuestra el resultado. $\blacksquare$