Universidad de Chile **Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**

Guía de Cardinalidad MA11A

13052003

Auxiliares: Alejandra Flores Arabach
Anghello Carvajal Vieyte
José Soto San Martín

Problemas

P1.- Sea A un conjunto infinito numerable, demostrar que

$$F(A) = \{B \in \mathcal{P}(A) \ / \ B \text{ es finito}\} \quad \text{es numerable.}$$

P2.- Sea A un alfabeto, es decir A es un conjunto finito de caracteres. Llamaremos A-*palabra* a toda secuencia finita de caracteres de A.
Demostrar que el conjunto de todas las A-palabras es numerable.

P3.- Demuestre que el conjunto de todos los círculos de radio $r \in \mathbb{Q}$ y centro $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable.

P4.- Se dice que un polígono del plano cartesiano es *entero* cuando sus vértices elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Demuestre que el conjunto de todos los polígonos enteros es numerable.

P5.- Dados dos conjuntos A, B infinitos numerables, demuestre que $A \times B$ es infinito numerable. Pruebe usando inducción que A^n es infinito numerable $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Nota: A^n se define como el producto cartesiano de A, n veces.

P6.-

a) Sea $A \neq \emptyset$ finito y $f : A \longrightarrow B$ sobreyectiva. Demostrar que $|B| \leq |A|$.

b) Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow B$ sobreyectiva. Demostrar que $|B| \leq \aleph_0$.
Hint: Recuerde que todo subconjunto de $\mathbb{N}$ posee un único primer elemento, para el orden usual (Los conjuntos que cumplen esta propiedad, para un orden total, se dicen *Bien Ordenados*).
Nota: $\aleph_0$ denota $|\mathbb{N}|$.

c) Sea $A \neq \emptyset$ infinito numerable y $f : A \longrightarrow B$ sobreyectiva. Demostrar que $|B| \leq |A|$.

P7.- Dados A, B conjuntos. $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ se define:

$$A^B = \{f : B \longrightarrow A \ / \ f \text{ es función}\}$$

Demostrar que dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $A \neq \emptyset$, y $B \neq \emptyset$ tq $|B| = n$,

$$|A^n| = |A^B|$$

† **P8.-** Sea $\mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} \ / \ q > 0\}$, $\forall \ p \in \mathbb{Z}$ se define la relación $\sim_p$ de la siguiente forma:

$$x \sim_p y \Leftrightarrow \exists \ \alpha \in \mathbb{Z}, \ \frac{x}{y} = p^\alpha$$

Demuestre que:

a) $\sim_p$ es relación de equivalencia.

b) $\mathbb{Q}_+/\sim_p$ es un conjunto infinito numerable.

P9.- $\forall \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se define $A_n = \{a_1 + a_2\sqrt{2} + \ldots + a_n\sqrt{n} \ / \ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\}$. Pruebe que A_n es numerable $\forall \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y concluya que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n \quad \text{es numerable.}$$

Hint: Verifique primero que $A_{n+1} = \bigcup_{a \in A_n} \{a + b\sqrt{n+1} \ / \ b \in \mathbb{Q}\}$