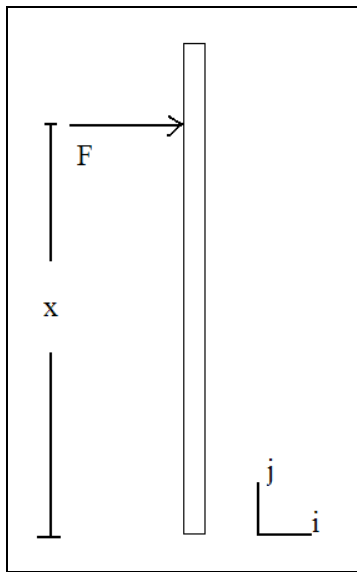


Solución del Ejercicio 13

A pesar de que el problema era bastante amplio, para resolverlo se podían hacer un par de consideraciones:

- o La mano agarra el extremo de la barra.
- o La forma en que la mano sentiría menos el golpe seria si la barra rotara en torno al punto extremo. Es decir, que la mano fuera el punto instantáneo de rotación.

Consideremos la siguiente configuración para el golpe. La barra esta en vertical y en reposo. Si se hace de otra forma, el resultado es el mismo! (ver porque)



Entonces, la fuerza F es una fuerza que actúa por un pequeño lapso de tiempo y que produce un cambio en el momentum de la barra (es decir, le imprime cierta velocidad). Si se aplican las leyes de Newton para analizar el movimiento:

$$(1) \quad \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_{CM}$$

$$(2) \quad \vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\alpha$$

Notar que se utiliza la definición básica de fuerza y torque, es decir, variaciones con respecto al tiempo de momentum lineal y angular respectivamente. Esto se hace ya que si utilizamos las ecuaciones anteriores, decimos que la fuerza F se esta aplicando en forma permanente, lo cual no es así.

La ecuación (1) habla de la traslación de la barra, y la ecuación (2) de la rotación de esta.

Entonces, queremos ver como afecta el golpe en el movimiento de la barra. Si consideramos que en $t=0$ actúa la fuerza, veamos que sucede antes y después de t .

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \vec{F} &= \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_{CM} \quad / \quad \int_{t=0-}^{t=0+} dt \\
 \Rightarrow \int_{t=0-}^{t=0+} \vec{F} dt &= \int_{t=0-}^{t=0+} \frac{d\vec{P}}{dt} dt = m \int_{t=0-}^{t=0+} \vec{a}_{CM} dt \\
 \Rightarrow \int_{t=0-}^{t=0+} \vec{F} dt &= \Delta\vec{P} = m\Delta\vec{v}_{CM} \\
 (2) \quad \vec{T} &= \frac{d\vec{L}}{dt} = I\alpha \quad / \quad \int_{t=0-}^{t=0+} dt \\
 \Rightarrow \int_{t=0-}^{t=0+} \vec{T} dt &= \int_{t=0-}^{t=0+} \frac{d\vec{L}}{dt} dt = I \int_{t=0-}^{t=0+} \alpha dt \\
 \Rightarrow \int_{t=0-}^{t=0+} \vec{T} dt &= \Delta\vec{L} = I\Delta\vec{\omega}
 \end{aligned}$$

Entonces, de acuerdo al sistema de referencia se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad \int_{t=0-}^{t=0+} F dt &= m \left(\underbrace{v_{CM}(t=0^+)}_v - \underbrace{v_{CM}(t=0^-)}_0 \right) = mv \\
 (2.1) \quad \int_{t=0-}^{t=0+} T dt &= I \left(\underbrace{\omega(t=0^+)}_v - \underbrace{\omega(t=0^-)}_0 \right) = I\omega
 \end{aligned}$$

Relacionando las dos ecuaciones a través del torque se tiene:

$$\underbrace{\int_{t=0-}^{t=0+} T dt}_{\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}} = x \int_{t=0-}^{t=0+} F dt = xmv = I\omega$$

Y por ultimo, considerando la relación entre velocidad tangencial y angular (el centro de masa describe un círculo en torno al origen!)

$$xmv = I\omega \Rightarrow xm \frac{L}{2} \omega = \frac{1}{3} mL^2 \omega \Rightarrow x = \frac{2}{3} L$$