

Se pide encontrar la frecuencia de oscilaciones en torno al punto de equilibrio del sistema vaso-objeto flotante.
Datos:

Ambos objetos son cilíndricos.

A_1 : Sección del vaso.

A_2 : Sección del objeto flotante.

h : Altura del objeto flotante.

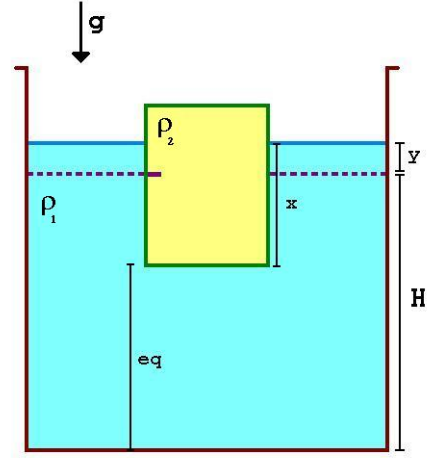
H : Altura del nivel del líquido en el instante inicial (sin el objeto flotante).

ρ_1 : Densidad del líquido.

ρ_2 : Densidad del objeto flotante.

Primero tenemos que encontrar la posición de equilibrio medida desde el fondo del vaso. La tomaré desde el fondo hasta la parte inferior del objeto flotante y la llamaremos eq . La distancia sumergida del objeto flotante será x y lo que sube el nivel del líquido al sumergirse el objeto será y . Entonces,

$$eq = H + y - x$$



Para encontrar x en función de los datos del problema debemos hacer equilibrio de fuerzas entre el peso y la fuerza de empuje dada por el principio de Arquímedes (visto en clase auxiliar), lo que nos da,

$$x = \frac{\rho_2}{\rho_1} h$$

Para encontrar y en función de x debemos imponer que el volumen asociado a lo que sube el nivel del líquido sea igual al volumen de lo que se sumerge el objeto flotante (ver primera figura):

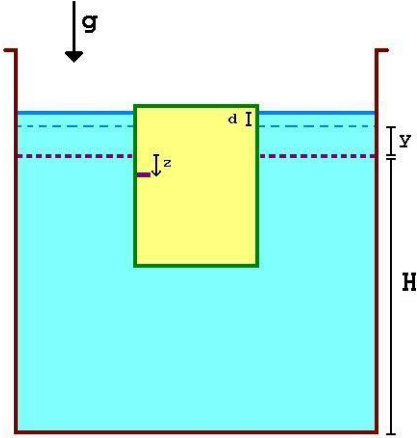
$$(x - y) A_2 = y (A_1 - A_2)$$

$$x A_2 = y A_1$$

$$y = \frac{A_2}{A_1} x$$

Por lo tanto,

$$eq = H + \frac{\rho_2}{\rho_1} h \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)$$



Ahora tenemos el punto de equilibrio del sistema. Veamos que sucede si lo perturbamos un poco. Para esto vamos a hundirlo en una distancia z tomada desde la altura H hasta la marca hecha cuando estaba en equilibrio. Al hundirlo en z entonces el nivel del líquido sube en una distancia d tal como muestra la segunda figura.

En este sistema de coordenadas el peso y la fuerza de empuje asociada al volumen sumergido en equilibrio se contrarrestan, por lo que sólo me preocuparé de la fuerza de empuje "efectiva" al perturbar el equilibrio, ésta fuerza de empuje está asociada al volumen dado por la distancia $d + z$ y se opone a la dirección de z . Como d crece con z , escribo la segunda ley de Newton como:

$$m\ddot{z} = -\rho_1 A_2 (d + z) g$$

Para encontrar d como función de z debo razonar de la misma forma que cuando encontramos y en función de x . Entonces,

$$A_2 z = (A_1 - A_2) d$$

$$d = \frac{A_2}{A_1 - A_2} z$$

Y como la masa del objeto flotante es $m = \rho_2 A_2 h$ entonces la ecuación diferencial será,

$$\rho_2 A_2 h \ddot{z} + \rho_1 A_2 g \left(\frac{A_2}{A_1 - A_2} + 1 \right) z = 0$$

$$\ddot{z} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{g}{h} \left(\frac{A_2}{A_1 - A_2} + \frac{A_1 - A_2}{A_1 - A_2} \right) z = 0$$

$$\ddot{z} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{g}{h} \left(\frac{A_1}{A_1 - A_2} \right) z = 0$$

Por lo tanto la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio del sistema será:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{g}{h} \left(\frac{1}{1 - \frac{A_2}{A_1}} \right)}$$

Notemos que todos los resultados obtenidos en el límite $A_1 \gg A_2$ rescatan lo esperado para un objeto flotante en el océano.

Nicolás Tejos – ntejos@das.uchile.cl