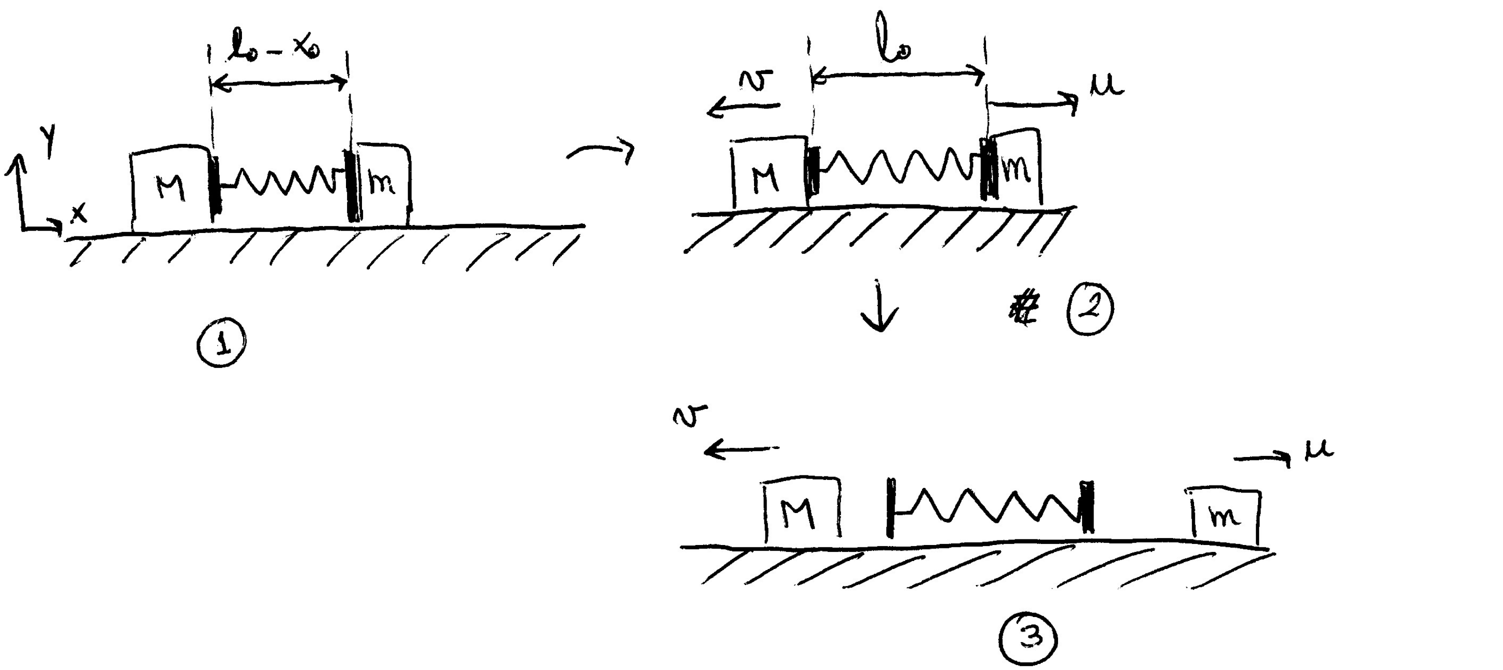
Momentum

Dos masas, M y m, descansan sobre un piso sin roce y están apoyadas (no unidos) al resorte de constante "k" y largo natural "l_0". Inicialmente el resorte se comprime un largo "x_0" manteniendo las masas pegadas a su extremo. Repentinamente se libera el sistema y las masas salen disparadas en direcciones opuestas.

Calculemos las velocidades finales de cada masa.



$$E_1 = \frac{1}{2} k x_0^2$$ (el sistema en reposo pero comprimido)

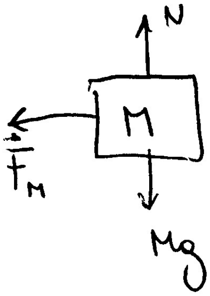
$$E_2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m u^2$$ (el resorte en su largo natural, justo cuando las masas pierden contacto con el resorte)

Por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m u^2$$ (1 ec, 2 incógnitas) $\Rightarrow$ falta otra ec.

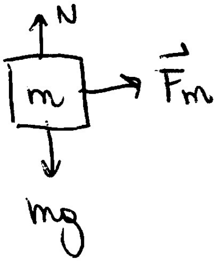
Veamos por fuerza:

DCL M



$$\boxed{M\ddot{x}_M = -F_M} \wedge \boxed{N = Mg}$$

DCL m



$$\boxed{m\ddot{x}_m = F_m} \wedge \boxed{N = mg}$$

pero debido a la naturaleza del resorte:

$$\vec{F}_M = -\vec{F}_m \Rightarrow -F_M\hat{x} = -F_m\cancel{\hat{x}} \Rightarrow F_M = F_m \Rightarrow \boxed{F_M - F_m = 0}$$

si $F_M - F_m = 0 \Rightarrow -M\ddot{x}_M - m\ddot{x}_m = 0$

$$\Rightarrow M\ddot{x}_M + m\ddot{x}_m = 0$$

pero $\ddot{x}_M = ?$ $\Rightarrow$ faltan datos??
$\ddot{x}_m = ?$

Veamos $\ddot{x}_M = \frac{d\dot{x}_M}{dt} = \frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$$\ddot{x}_m = \frac{d\dot{x}_m}{dt} = \frac{du}{dt} \approx \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow M\frac{\Delta v}{\Delta t} + m\frac{\Delta u}{\Delta t} = 0$$

Esta ecuación es válida para todo intervalo de tiempo Δt. Sea $\Delta t = t_B - t_A$.

Entonces: $\Delta v = v_B - v_A$

$\Delta u = u_B - u_A$

$$\Rightarrow M\frac{(v_B - v_A)}{(t_B - t_A)} + m\frac{(u_B - u_A)}{(t_B - t_A)} = 0$$

$$\Rightarrow M(v_B - v_A) + m(u_B - u_A) = 0$$

$$\Rightarrow M v_B + m u_B = M v_A + m u_A$$

para cualquier pares de puntos A y B

$$\Rightarrow \boxed{Mv + mu = cte.}$$

"Conservación del momentum lineal"

Definición

Cada vez que no existan fuerzas "externas" actuando sobre el sistema, permanece cte. la cantidad.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i v_i = cte. = \text{momentum}}$$

En el caso de una partícula

$$p = mv \Rightarrow \dot{p} = m\dot{v} \Rightarrow \dot{p} = ma = \sum F_{ext}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta p}{\Delta t} = \sum F_{ext} = \frac{dp}{dt}}$$

si $p = cte \Rightarrow \Delta p = 0 \Rightarrow \boxed{\sum F_{ext} = 0}$

Notar que: Momentum = masa × velocidad

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad \text{(es una cantidad vectorial)}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\vec{p}_i}_{\text{momentum partícula i-ésima}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \underbrace{\vec{P}}_{\text{momentum total}}$$

$$\text{si} \quad \vec{P} \text{ es cte} \Rightarrow \vec{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 v_{1x} \\ m_1 v_{1y} \\ m_1 v_{1z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_2 v_{2x} \\ m_2 v_{2y} \\ m_2 v_{2z} \end{pmatrix} + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad P_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \ldots$$

$$P_y = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + \ldots$$

$$P_z = m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z} + \ldots$$

$\Rightarrow$ El momentum se conserva por componente.

Volviendo al problema, tenemos:

$$\frac{1}{2} k x_0^2 \pm \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m u^2$$

$$m u + M v = \text{cte} \Rightarrow \text{en } t = 0 \Rightarrow v = 0 = u \Rightarrow \text{cte} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1) \quad k x_0^2 = M v^2 + m u^2$$

$$(2) \quad 0 = m u + M v \Rightarrow \boxed{u = \frac{-M v}{m}}$$

$$\Rightarrow k x_0^2 = M v^2 + m \frac{M^2 v^2}{m^2} = M v^2 + \frac{M^2 v^2}{m}$$

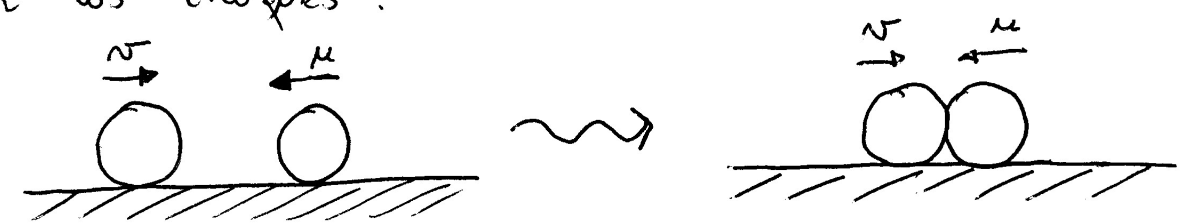
$$\Rightarrow v^2 \left(M + \frac{M^2}{m} \right) = k x_0^2 \Rightarrow v = \pm \sqrt{\frac{k x_0^2 \cdot m}{M(M+m)}}$$

$$\Rightarrow \mu = -\frac{M}{m} \cdot \pm \sqrt{\frac{k x_0^2 m}{M(M+m)}} = \mp \sqrt{\frac{k x_0^2 M}{m(M+m)}}$$

Esto quiere decir que si: μ es $(-)$ $\Rightarrow$ v es $(+)$
μ es $(+)$ $\Rightarrow$ v es $(-)$ (nuestro caso) ✓✓

Choques

Hemos visto que el momentum se conserva cuando no existen fuerzas externas afectando al sistema. ¿Qué ocurre en los choques?



Por choque se entiende que dos partículas están en contacto por un tiempo muy corto, tiempo en el cual el mov. relativo de las partículas es despreciable y, aún cuando existan fuerzas externas, como gravitación, fricción, etc, ellas no afectarán lo que suceda durante el choque. De este modo, en el intervalo de tiempo en que transcurre el choque, el momentum del sistema de partículas se conserva.

Ley: "El momentum siempre se conserva durante los choques."

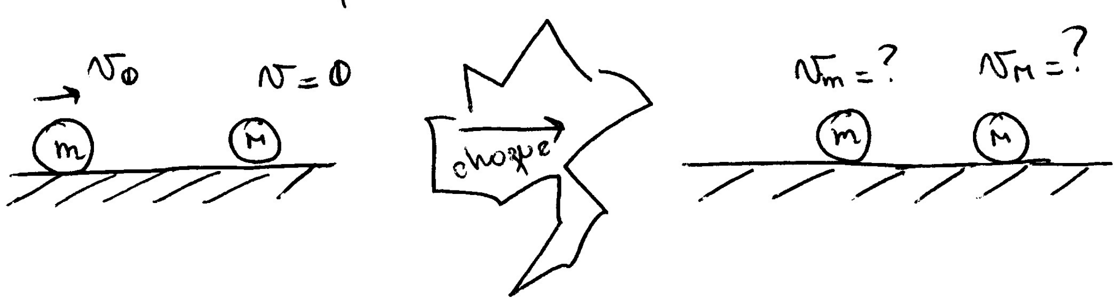
Tipos de choques:

→ choque elástico ⇒
- Conservación del Momentum
- Conservación de la energía (antes y después del choque)

→ choque inelástico o disipativo ⇒ Existe pérdida de energía
- Conservación del momentum
- No se puede conservar energía entre el momento anterior y posterior a la colisión.

Ejemplo choque elástico

Suponga choque elástico entre la masa "m" y "M". Calcule las velocidades finales



Por conser. del momentum: $\underbrace{m v_0}_{p_i} = \underbrace{m v_m + M v_M}_{p_f}$ (1)

" " de Energía: $\underbrace{\frac{1}{2} m v_0^2}_{E_i} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2}_{E_f}$ (2)

de (1) ⇒ $v_0 = v_m + \frac{M}{m} v_M$ $\quad / (\;)^2 \Rightarrow v_0^2 = \left(v_m + \frac{M}{m} v_M\right)^2$ en (2)

$$\Rightarrow \left(v_m + \frac{M}{m} v_M\right)^2 = v_m^2 + \frac{M}{m} v_M^2$$

$$\cancel{v_m^2} + 2\frac{M}{m} v_m v_M + \left(\frac{M}{m}\right)^2 v_M^2 = \cancel{v_m^2} + \frac{M}{m} v_M^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{v_M = 0}_{\text{se descarta}} \quad ó \quad \frac{2\cancel{M}}{\cancel{m}} v_m + \left(\frac{M}{m}\right)^{\cancel{2}} v_M = \cancel{\left(\frac{M}{m}\right)} v_M$$

$$\Rightarrow 2 v_m + \left(\frac{M}{m}\right) v_M = v_M$$

$$\Rightarrow 2 v_m = v_M \left(1 - \frac{M}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_m = v_M \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{M}{m}\right)}$$

si $M = m$; $v_m = 0$

$$\Rightarrow m v_0 = m \frac{v_M}{2}\left(1 - \frac{M}{m}\right) + M v_M$$

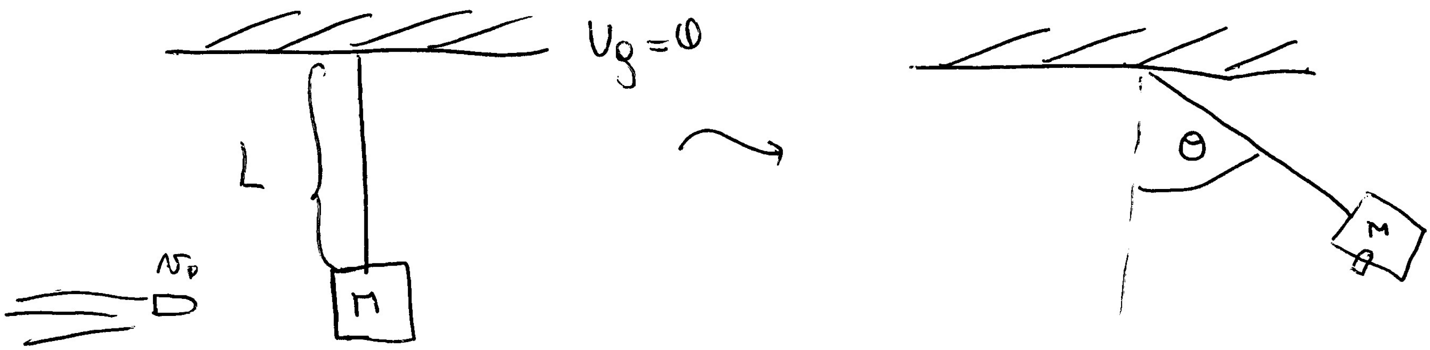
$$\Rightarrow v_0 = \frac{v_M}{2} - \frac{v_M}{2}\left(\frac{M}{m}\right) + \frac{M}{m} v_M$$

$$v_0 = \frac{v_M}{2} + \frac{v_M}{2} \cdot \left(\frac{M}{m}\right) \Rightarrow \boxed{v_M = \frac{v_0 \cdot 2m}{(m+M)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_m = \frac{v_0 \cdot m}{(m+M)}\left(\frac{m-M}{m}\right) = \frac{v_0 (m-M)}{(m+M)}}$$

Ejemplo choque inelástico

Una bala es disparada con $v = v_0$ cte hacia un péndulo de masa M que inicialmente está en reposo. Si luego de hacer impacto, la ~~masa~~ bala queda inscrustada en el péndulo, alcanzando éste un ángulo máximo de $\theta = \frac{\pi}{2}$, calcule la masa de la bala.



Choque inelástico $\Rightarrow$ sólo conservación momentum

$$\Rightarrow \begin{array}{l} p_i = m v_0 \\ p_f = (m+M) v_f \end{array} \Rightarrow \boxed{m v_0 = (m+M) v_f}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_f = \frac{v_0 m}{(m+M)}}$$

por energía: (después del choque)

$$E_i = \frac{1}{2}(m+M) v_f^2 - mgL \quad \left(\text{justo después del impacto}\right)$$

$$\underbrace{E_f = 0}_{\left(\text{cuando llega a } \theta = 90\right)} \Rightarrow v_f^2 = \frac{2mgL}{(m+M)} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2mgL}{(m+M)}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2mgL}{(m+M)}} = \frac{v_0 m}{(m+M)} \quad //()^2$$

$$\frac{2\cancel{m}gL}{\cancel{(m+M)}} = \frac{v_0^2 \cdot m^{\cancel{2}}}{(m+M)^{\cancel{2}}} \Rightarrow 2gL = \frac{v_0^2 \cdot m}{(m+M)}$$

$$\Rightarrow \quad (m+M)2gL = v_0^2 \cdot m$$

$$\Rightarrow \quad m(2gL - v_0^2) = -2gLM$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m = \frac{M \cdot 2gL}{(v_0^2 - 2gL)}}$$