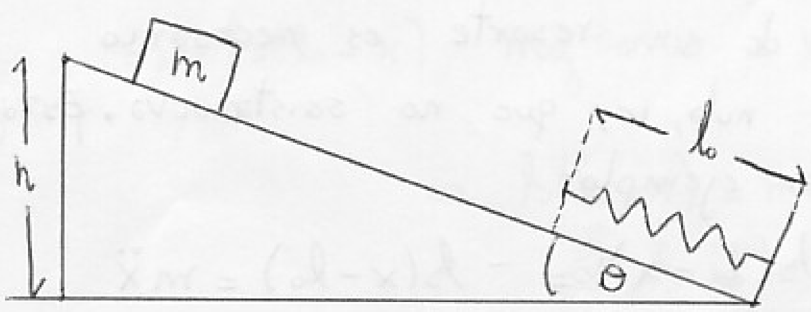
roblema 1

Una masa "m" desliza por un plano inclinado sin roce. La masa se suelta desde una altura h, de modo que se desliza hacia abajo hasta tocar el extremo de un resorte de cte. elástica "k" y largo natural "$l_0$". Una vez que la masa toca el resorte, queda oscilando permanentemente unida al extremo del resorte.

a) ¿Cuál es el valor de la veloc. cuando la masa "m" se engancha al resorte?

b) Encuentre el nuevo pto. de equilibrio del resorte

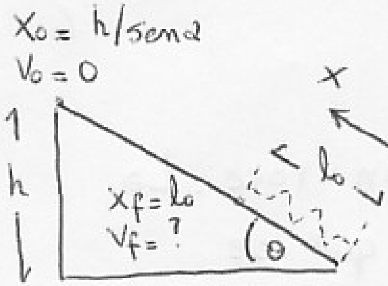
c) Calcule una expresión para la veloc. de la masa luego que se engancha al resorte.




Sol:

Parte a)

Utilicemos Ec. de Torricelli: $V_f^2 - V_0^2 = 2a(x_f - x_0)$

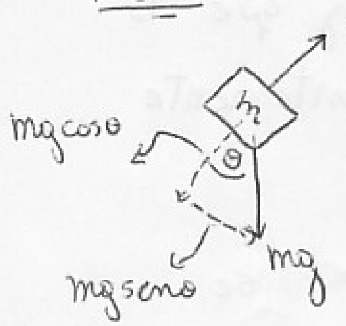



$$\Rightarrow V_f^2 - V_0^2 = 2a_x(x_f - x_0)$$

$$V_f^2 - 0^2 = 2 \cdot a_x\left(l_0 - \frac{h}{\text{sen}}\right)$$

$$a_x = ?$$

DCL m (aún no hay contacto con resorte)




$$\sum F_x = -mg\,\text{sen}\theta = m\ddot{x}$$

$$\sum F_y = N - mg\cos\theta = m\cancel{\ddot{y}}^{\,0}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = mg\cos\theta}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -mg\,\text{sen}\theta$$

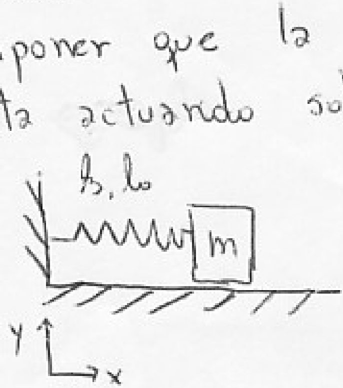
$$\Leftrightarrow \quad \ddot{x} = -g\,\text{sen}\theta = a_x$$

$$\Rightarrow V_f^2 = 2 \cdot -g\,\text{sen}\theta \cdot \left(l_0 - \frac{h}{\text{sen}\theta}\right)$$

$$\Rightarrow V_f = \sqrt{2g\,\text{sen}\theta\left(\frac{h}{\text{sen}\theta} - l_0\right)} \quad //$$

Parte b)

Para calcular el pto de eq. de un resorte es necesario imponer que la dinámica sea nula, ie, que no exista una fuerza neta actuando sobre la masa. Por ejemplo:




$$F_{elastica} = k(l_0 - x) = -k(x - l_0) = m\ddot{x}$$

quiero que: $m\ddot{x} = F_N = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0$

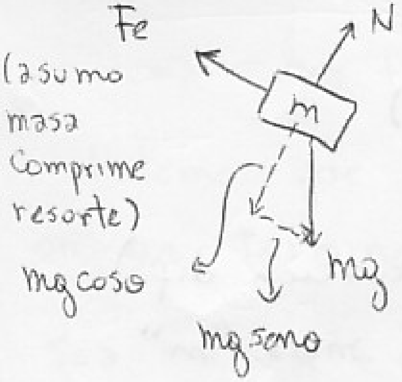
$$\Rightarrow -k(x - l_0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{X_{eq} = l_0}$$

Notemos que cuando la masa esta en $l_0$, el resorte no esta ni estirado ni comprimido $\Rightarrow$ no realiza fuerza sobre la masa m.

Entonces en nuestro caso:

DCL m (ya en contacto con resorte)

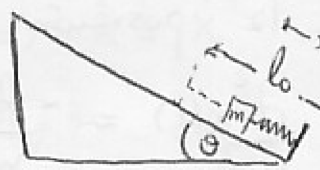



$$\sum F_x = F_e - mg\,\text{sen}\theta = m\ddot{x}$$

pero $F_e = k(l_0 - x)$ ¿por qué?

notar que cuando $x < l_0$ (resorte comprimido)

$\Rightarrow l_0 - x > 0$




$\Rightarrow F_e > 0$

$\Rightarrow$ sentido "+"

$\Rightarrow$ empuja masa

$\Rightarrow$ consecuente con DCL.

$$\sum F_y = N - mg\cos\theta = m\ddot{y} \Rightarrow N = mg\cos\theta \quad (1)$$

$$k(l_0 - x) - mg\,\text{sen}\theta = m\ddot{x} \quad (2)$$

Entonces queremos $x_{eq}$:

$$\Rightarrow k(l_0 - x) - mg\,\text{sen}\theta = m\cancel{\ddot{x}}^{\,0}$$

$$\Rightarrow k(l_0 - x) = mg\,\text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow k \cdot l_0 - mg\,\text{sen}\theta = k x_{eq}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{eq} = l_0 - \frac{mg\,\text{sen}\theta}{k}}$$

Parte c)

Queremos encontrar una expresión para la veloc. de la masa cuando oscila unida al resorte, ie, queremos $\dot{x}(t)$

Nosotros sabemos que la sol. de la ec. dif:

$$(*)\ m\ddot{x} = -k x \Rightarrow x(t) = A\cos(\underbrace{\sqrt{\tfrac{k}{m}}}_{\omega}t + \phi)$$

Notemos que en la ec. anterior (ojo: en la ecuación dif) x depende del tiempo, x es la posición de la masa "m"

$$\Rightarrow m\ddot{x}(t) = -k x(t) \iff \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t)$$ y nosotros

queremos encontrar la solución que cumpla la ec. anterior y como ya es sabido $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ cumple. $\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$

Por el momento no se tiene conocimiento sobre ec. diferenciales pero por ahora basta con que sepan que:

$$\ddot{\bigtriangleup}(t) + \square^2 \bigtriangleup(t) = 0 \Rightarrow \bigtriangleup(t) = A\cdot\cos(\square\cdot t + \phi)$$

En el caso del resorte: $\bigtriangleup(t) = x(t)$

$$\square^2 = \frac{k}{m}$$

Notemos que
$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t + \phi) \\ &= A[\cos(\omega t)\cos\phi - \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}\phi] \\ &= \underbrace{A\cdot\cos\phi}_{B}\cdot\cos(\omega t)\underbrace{-A\operatorname{sen}\phi}_{C}\operatorname{sen}(\omega t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x(t) = B\cos(\omega t) + C\operatorname{sen}(\omega t)$$

...n nuestro problema:

$$k(l_0 - x) - mg\,\text{sen}\theta = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow -kx + (kl_0 - mg\,\text{sen}\theta) = m\ddot{x} \quad (*)$$

Notemos que $(*)$ no es igual que a $(\star)$, difieren en un término cte. ¿Qué hacemos? Un cambio de variable.

Sea $\quad x = x' + \text{cte} \quad \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}' \quad \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{x}'$

$$\Rightarrow -k(x' + \text{cte}) + (kl_0 - mg\,\text{sen}\theta) = m\ddot{x}'$$

$$\Rightarrow -kx' - k\,\text{cte} + (kl_0 - mg\,\text{sen}\theta) = m\ddot{x}'$$

quiero que $\quad -k\,\text{cte} + (kl_0 - mg\,\text{sen}\theta) = 0$

$$\Rightarrow \text{cte} = \frac{(kl_0 - mg\,\text{sen}\theta)}{k} = x_{eq} \;!!!$$

$$\Rightarrow x = x' + x_{eq} \quad (\text{ojo: } x(t) = x'(t) + \underbrace{x_{eq}}_{\text{cte.}})$$

Entonces si $\quad x = x' + x_{eq}$

$$\Rightarrow (*) \text{ queda: } \quad -kx' = m\ddot{x}' \quad \left(\Uparrow(t) = x'(t)\right)$$

$$\Rightarrow x'(t) = A\cos(\omega t + \phi); \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x'(t) = B\cos(\omega t) + C\,\text{sen}(\omega t)$$

$$\Rightarrow x(t) = B\cos(\omega t) + C\,\text{sen}(\omega t) + x_{eq}$$

Necesitamos despejar las ctes. B y C. ¿cómo? con las condiciones iniciales. ¿Cuáles? En la parte a) nos pedían

Calcular la veloc. con la cual la masa llega al resorte. Esta veloc. en la veloc. inicial con la cual se mueve el resorte $\Rightarrow$ Cond. iniciales son: (consideremos $t=0$ el momento en que la masa se une al resorte)

$$x(0) = l_0$$

$$\dot{x}(0) = V_f \quad (V_f \text{ es conocida})$$

$$\Rightarrow x(t) = B\cdot\cos(\omega t) + C\,\text{sen}(\omega t) + x_{eq_x}$$

$$\Rightarrow x(0) = l_0 = B\cdot\underbrace{\cos(0)}_{1} + C\cdot\underbrace{\text{sen}(0)}_{0} + x_{eq_x}$$

$$\Rightarrow B = (l_0 - x_{eq_x}) = \frac{mg}{k}\,\text{sen}\theta$$

Ahora: $x(t) = B\cos(\omega\cdot t) + C\,\text{sen}(\omega t) + x_{eq_x}$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -B\omega\,\text{sen}(\omega t) + C\omega\cos(\omega t)$$

$$\dot{x}(0) = V_f = -B\cdot\omega\,\underbrace{\text{sen}(0)}_{0} + C\cdot\omega\,\underbrace{\cos(0)}_{1}$$

$$\Rightarrow V_f = C\cdot\omega \Rightarrow C = \frac{V_f}{\omega} = \frac{V_f}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\cdot V_f.$$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{\frac{mg}{k}\,\text{sen}\theta}_{(l_0 - x_{eq_x})}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right) + \sqrt{\frac{m}{k}}\underbrace{\sqrt{2g(h - l_0\,\text{sen}\theta)}}_{V_f}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right) + x_{eq_x}$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\sqrt{2g(h - l_0\,\text{sen}\theta)}\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) - \frac{mg}{k}\,\text{sen}\theta\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}(t) = \sqrt{2g(h - l_0\,\text{sen}\theta)}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right) - \sqrt{\frac{m}{k}}\,g\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)}$$