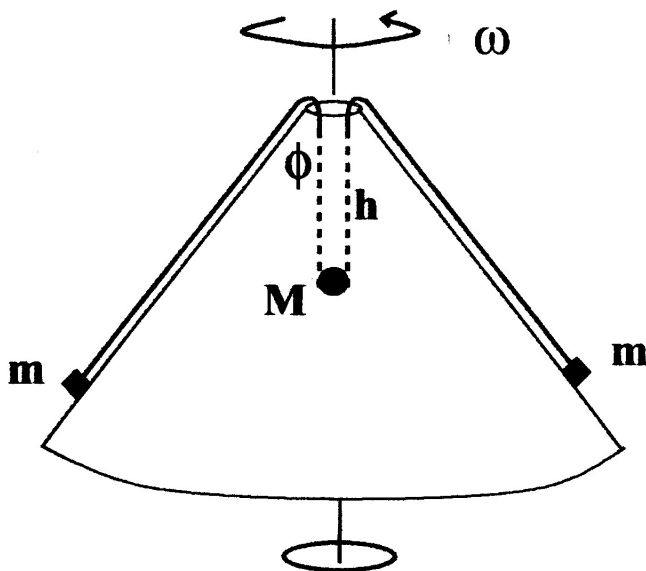


### PROBLEMA 3

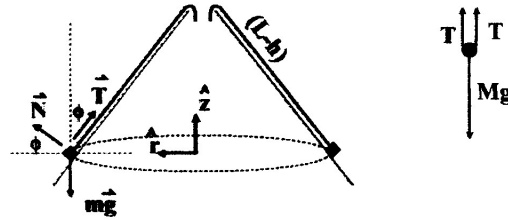
En la figura se muestra dos cubos pequeños e idénticos de masa  $m$  unidos por una cuerda ideal de longitud  $2L$ . El sistema se dispone simétricamente sobre una superficie cónica con un orificio de canto suave en su punta superior. La cuerda entra parcialmente por el orificio y es tensada mediante una carga de masa  $M$  la cual no se mueve verticalmente. El cono y los cubos rotan conjuntamente con velocidad angular  $\omega$  constante; estos últimos describen movimientos circunferenciales y se mantienen en contacto con el cono. El ángulo que forma la vertical con una directriz del cono es  $\phi$ . Considere el orificio y la carga de dimensiones muy pequeñas.

A)[4Pt] Determine la profundidad  $h$  de la carga con respecto a la punta del cono que permite la situación descrita.

B)[2Pt] Determine el rango de  $M$  a objeto de que el sistema descrito sea físicamente factible.



### RESOLUCION de PROBLEMA 3



- Fuerzas sobre la carga (y pedazo de cuerda adherido): dos tensiones ( $2T$ ; hacia arriba) y peso ( $Mg$ ; hacia abajo). La carga no se mueve por lo tanto  $\underline{2T = Mg}$
- Estudiamos uno de los cubos en movimiento circular de radio  $r = (L - h) \sin \phi$ .
- Fuerzas actuando sobre los cubos: Peso ( $mg$ ; hacia abajo), normal ( $N$ ;  $\perp$  superficie) y tensión de la cuerda ( $T$ ; según superficie); la aceleración ( $\omega^2 r$ , centrípeta).
- Ecuación del movimiento y proyecciones según  $\hat{r}$  y  $\hat{z}$ :

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$0 + N \cos \phi - T \sin \phi = -m\omega^2(L - h) \sin \phi \quad \text{según } \hat{r} \quad (1)$$

$$-mg + N \sin \phi + T \cos \phi = 0 \quad \text{según } \hat{z} \quad (2)$$

- Utilizar Ec. 2 para despejar  $N$  ( $N = (mg - T \cos \phi) / \sin \phi$ ) y sustituir en 2:

$$\left( \frac{mg - T \cos \phi}{\sin \phi} \right) \cos \phi - T \sin \phi = -m\omega^2(L - h) \sin \phi$$

- Limpiando:

$$T - mg \cos \phi = m\omega^2(L - h) \sin^2 \phi \quad (3)$$

- Despejamos  $h$  sustituyendo valor de  $T$ :

$$h = L - \frac{Mg/2 - mg \cos \phi}{m\omega^2 \sin^2 \phi}$$

- Condiciones para  $M$ . Notar que los cubos deben estar en contacto con el cono. Por lo tanto la fza normal debe ser positiva:  $N \geq 0$ . De la solución para  $N$  se tiene

$$N = (mg - T \cos \phi) / \sin \phi \geq 0 \quad \rightarrow \quad mg \geq T \cos \phi \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{M \leq m / \cos \phi}}$$

- Hay otra condición que emana de Ec. 3:  $(L - h) \geq 0 \Rightarrow$

$$T - mg \cos \phi = m\omega^2(L - h) \sin^2 \phi \geq 0 \quad \rightarrow \quad T - mg \cos \phi \geq 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{M \geq m \cos \phi}}$$

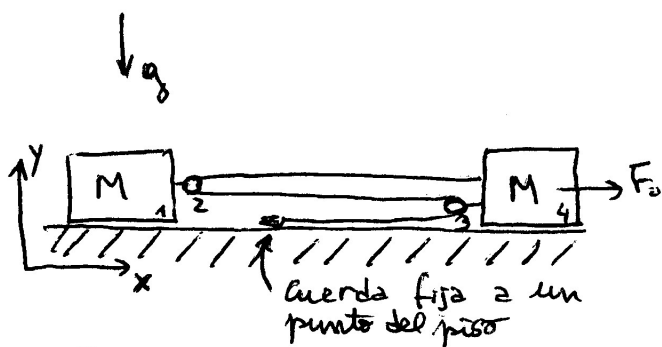
- Resumimos:  $\underline{\underline{m \cos \phi \leq M \leq m / \cos \phi}}$

- También notar que  $h \geq 0$ , por lo tanto

$$h = L - \frac{Mg/2 - mg \cos \phi}{m\omega^2 \sin^2 \phi} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad L \geq \frac{Mg/2 - mg \cos \phi}{m\omega^2 \sin^2 \phi} \quad \Rightarrow$$

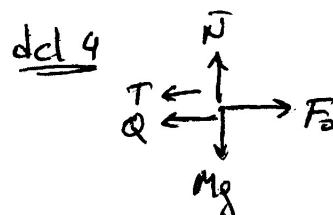
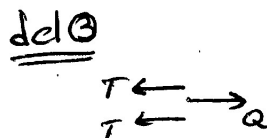
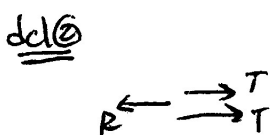
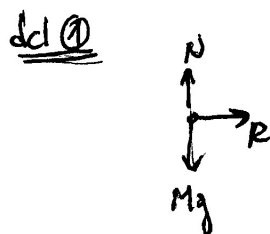
$$\underline{\underline{M \leq 2m \left( \left( \frac{\omega^2 L}{g} \right) \sin^2 \phi + \cos \phi \right)}}$$

PUNTUACION: 1Pto determinación de  $T = Mg/2$  + 1Pto DCL correcto para cubos + 1Pto ecuaciones y proyecciones fzas sobre de cubos + 1Pto despeje de  $h$  + (1+1)Ptos por cada cota en  $M$  (basta dos!)



El sistema está formado por dos bloques de masa  $M$ , dos poleas ideales y una cuerda ideal (sin masa, sin roce e inextensible). Si se aplica una fuerza  $F_0$  como en la figura, calcular la aceleración de ambos bloques.

Sol Leyes de Newton para cada cuerpo



Se pueden omitir los dcl de las poleas si éstas se consideran como parte de cada bloque, el resultado es el mismo. Eso se puede hacer si las poleas no tienen masa ni roce.

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow & \begin{cases} \textcircled{2} & T + T - R = 0 \\ \textcircled{3} & Q - T - T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2T = R \\ 2T = Q \end{cases} \Rightarrow Q = R = 2T \\ \textcircled{1} & \begin{aligned} N - Mg &= 0 \\ R &= M \ddot{x}_1 \end{aligned} \\ \textcircled{4} & \begin{aligned} F_0 - T - Q &= M \ddot{x}_4 \\ N - Mg &= 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Las fuerzas  $Q$  y  $R$  son las interacciones entre las poleas y los bloques. Se pueden suponer unidos por pedazos de cuerdas ideales, así  $Q$  y  $R$  serían tensiones.

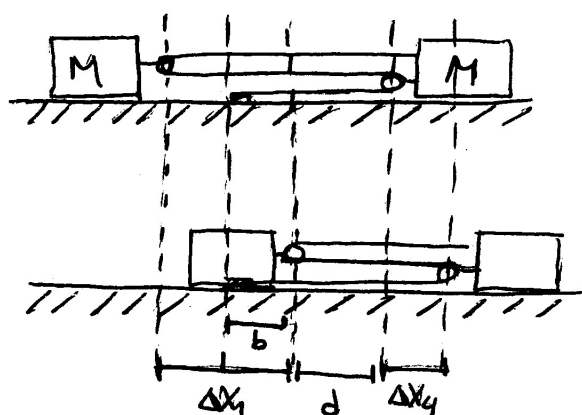
Así:  $R = M \ddot{x}_1 \Rightarrow \underline{2T = M \ddot{x}_1}$  que era lo mismo que no considerar la polea y decir que el cuerpo ① es tirado por dos tensiones.

$$F_0 - T - Q = M \ddot{x}_4 \Rightarrow \underline{F_0 - 3T = M \ddot{x}_4}$$

Tenemos un sistema lineal de dos ecuaciones y tres incógnitas:

$$\underline{2T = M\ddot{x}_1} \quad \underline{F_0 - 3T = M\ddot{x}_4} \quad T, \ddot{x}_1, \ddot{x}_4$$

Falta una ecuación. Hay una relación entre  $\ddot{x}_1$  y  $\ddot{x}_4$   
 Suponemos que ④ se mueve un  $\Delta x_4$  a la derecha y vemos que sucede con ①



La clave es que la cuerda ideal es inextensible, por lo tanto su longitud es constante, supongamos  $L$

antes del desplazamiento:

$$L = 2\Delta x_1 + 3d + b$$

después del desplazamiento

$$L = 3d + 3\Delta x_4 + b$$

$$\Rightarrow 2\Delta x_1 + 3d + b = 3d + 3\Delta x_4 + b$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta x_1 = \frac{3}{2}\Delta x_4} \quad \text{Es decir, si ④ se mueve un } \Delta x_4, \text{ ① se mueve } \frac{3}{2}\Delta x_4$$

$$\text{Para que esto suceda } \dot{x}_1 = \frac{3}{2}\dot{x}_4 \quad \wedge \quad \ddot{x}_1 = \frac{3}{2}\ddot{x}_4$$

De lo que tenemos la tercera ecuación

$$\left. \begin{array}{l} 2T = M\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 = \frac{3}{2}\ddot{x}_4 \end{array} \right\} \Rightarrow 2T = M\frac{3}{2}\ddot{x}_4 \Rightarrow 4T = 3M\ddot{x}_4 \Rightarrow \frac{4T}{3M} = \frac{F_0 - 3T}{M} \Rightarrow \boxed{T = \frac{3}{13}F_0}$$

$$F_0 - 3T = M\ddot{x}_4$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}_1 = \frac{6}{13}\frac{F_0}{M}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}_4 = \frac{4}{13}\frac{F_0}{M}}$$

Nota: La cuerda y las poleas son ideales  $\Rightarrow$  la tensión a lo largo de la cuerda no cambia