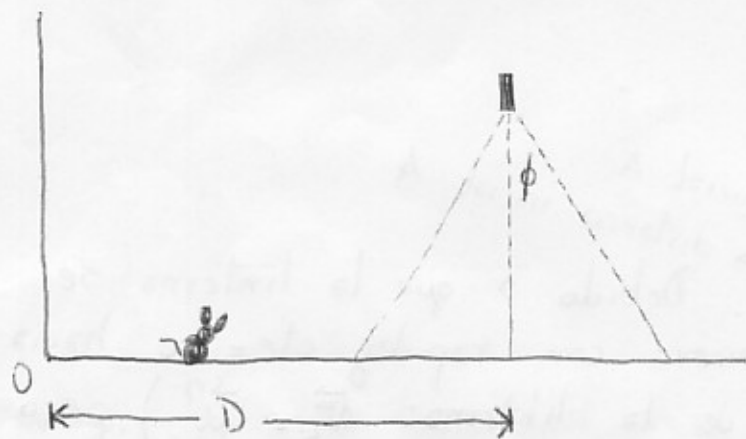
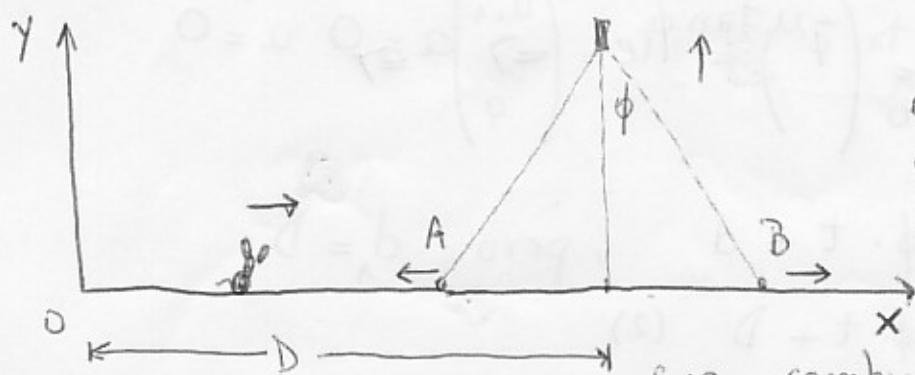


P1 Una linterna asciende verticalmente con rapidez etc. u iluminando en forma cónica un área circular sobre el piso. Mientras ello ocurre un ratón se aleja de su casa con rapidez etc. v_0 en trayectoria rectilínea que atraviesa diametralmente el área iluminada. Inicialmente el ratón se encuentra en la puerta de su casa y la linterna sobre el piso a una distancia D del ratón. El cono de iluminación de la linterna está caracterizado por un ángulo directriz ϕ . Calcule el lapso t^* que el ratón permanece iluminado.



Sol:

Tomamos como sistema de referencia el pto O tq:



El problema consiste en calcular el tiempo que demora el ratón en recorrer la distancia entre A y B. El problema es que esta distancia no es fija, cambia en el tiempo debido al mov. de la linterna.

Entonces el problema puede abordarse de la siguiente forma:

- 1^{era}) Calcular el tiempo que el ratón demora en encontrarse con el pto A, es decir, tiempo A (t_A)
- 2^{da}) Calcular el tiempo que el ratón demora en alcanzar el pto. B, es decir, tiempo B (t_B)
- 3^{era}) Restar ambos tiempos ya que $t^* = t_B - t_A$.

ECS:

→ Ratón

El mov. del ratón es sólo sobre el eje x

$\Rightarrow x_R(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + d$, pero el ratón se mueve con rapidez $v_0 = \text{cte} \Rightarrow a = 0$. Además nuestro sistema de referencia es tal que $d = 0$.

$$\Rightarrow x_R(t) = v_0 \cdot t \quad (1)$$

→ Punto A.

Mov. sobre eje x

$\Rightarrow x_A(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + \underbrace{(u_{0A})}_{\text{veloc. inicial A}} t + \underbrace{(d_A)}_{\text{distancia inicial A}}$. Debido a que la linterna se mueve con rapidez $\text{cte} = u$ hacia arriba \Rightarrow vector velocidad de la linterna: $\vec{v}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$, pero vector velocidad de A: $\vec{v}_A = \begin{pmatrix} -u_A \\ 0 \end{pmatrix}$; Como se relaciona u_0 con u ?



$$\Rightarrow \tan \phi = \frac{u_A}{u} \Rightarrow u_0 = u \tan \phi$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A = \begin{pmatrix} -u \tan \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \text{cte} = \begin{pmatrix} u_{0A} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow x_A(t) = -u \cdot \tan \phi \cdot t + d, \text{ pero } d_A = D$$

$$x_A(t) = -u \cdot \tan \phi \cdot t + D \quad (2)$$

→ Punto B.

Mov sobre eje x

$$X_B(t) = \frac{1}{2} a t^2 + \underbrace{u_{0B}}_{\text{veloc. inicial B}} t + \underbrace{d_B}_{\text{dist. inicial B}}$$

Por simetría con análisis pto. A

Nota: la comp. "x" de la veloc \vec{v}_B es positiva por el sentido del mov.

$$\Rightarrow u_B = u \cdot \tan \phi$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \begin{pmatrix} u_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cdot \tan \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \text{cte} = \begin{pmatrix} u_{0B} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = 0 \quad \text{y} \quad d_B = D.$$

$$\Rightarrow X_B(t) = u \cdot \tan \phi \cdot t + D.$$

Entonces:

→ Paso 1) Queremos el tiempo en el que el ratón y A se encuentran \Rightarrow ambos están en el mismo pto en t_A

$$\Rightarrow X_R(t_A) = X_A(t_A)$$

$$v_0 \cdot t_A = -u \tan \phi \cdot t_A + D$$

$$\Rightarrow \boxed{t_A = \frac{D}{(v_0 + u \tan \phi)}}$$

→ Paso 2) Queremos t_B $X_R(t_B) = X_B(t_B)$

$$\Rightarrow v_0 \cdot t_B = D + u \cdot \tan \phi \cdot t_B$$

$$\Rightarrow \boxed{t_B = \frac{D}{(v_0 - u \tan \phi)}}$$

→ Paso 3) $t^* = t_B - t_A$

$$t^* = \frac{D}{(v_0 - u \tan \phi)} - \frac{D}{(v_0 + u \tan \phi)} = \frac{2u D \tan \phi}{(v_0^2 - u^2 \tan^2 \phi)}$$

Notemos que si: $v_0 \gg u \tan \phi$

$$v_0^2 \gg u^2 \tan^2 \phi$$

$\Rightarrow v_0^2 - u^2 \tan^2 \phi$ es grande

$\Rightarrow t^*$ es chico, lo cual tiene sentido, ya

que si v_0 es muy grande en comparación a $u \tan \phi$

\Rightarrow ratón se demora menos en cruzar la zona iluminada.

Ahora si $v_0 \approx u \tan \phi$

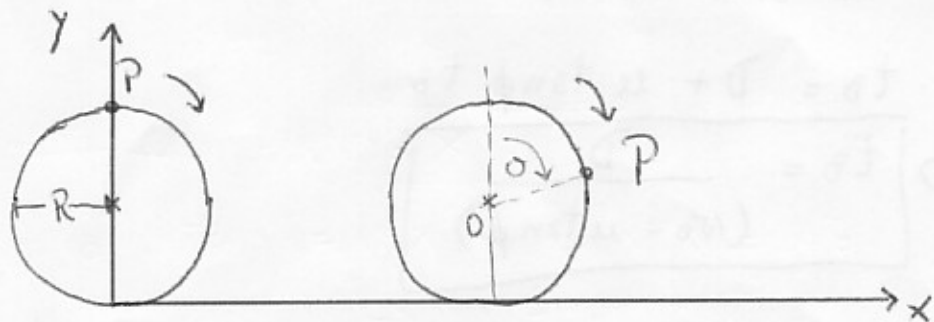
$$\Rightarrow v_0^2 - u^2 \tan^2 \phi \approx 0$$

$\Rightarrow t^*$ es grande, ya que si el ratón se

mueve con rapidez $v_0 \approx u \tan \phi \Rightarrow$ ratón se mueve

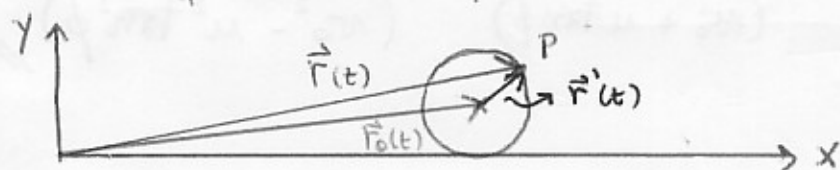
con la misma rapidez que lleva el pto. B \Rightarrow demora un tiempo mayor en alcanzar a B y por lo tanto salir de la zona iluminada.

P2] Determine el vector posición, velocidad y aceleración de un punto P sobre la circunferencia que rueda sobre un plano sin resbalar con veloc. angular $\omega = \omega$.



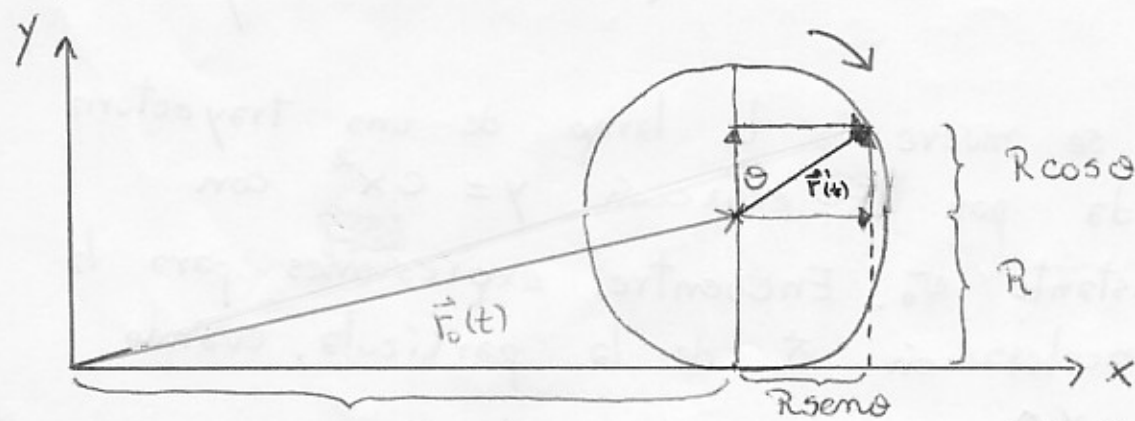
Sol:

Notemos que $\vec{r}_P(t)$ puede ser descrito como $\vec{r}_O(t) + \vec{r}'(t) = \vec{r}_P(t)$



Entonces, calculemos $\vec{r}_0(t)$, $\vec{r}'(t)$.

El vector $\vec{r}_0(t)$ es el vector posición del centro de la circunferencia y $\vec{r}'(t)$ el vector posición del punto con respecto al centro de la circunferencia.



$X = \theta \cdot R$ (condición rodar sin resbalar)
(el dibujo engaña)

$$\Rightarrow \vec{r}_0(t) = \begin{pmatrix} \theta \cdot R \\ R \end{pmatrix} \text{ pero } \theta = \omega \cdot t \Rightarrow \vec{r}_0(t) = \begin{pmatrix} \omega \cdot t \cdot R \\ R \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} R \sin \theta \\ R \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin(\omega \cdot t) \\ R \cos(\omega \cdot t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_p(t) = \begin{pmatrix} \omega \cdot t \cdot R + R \sin(\omega t) \\ R + R \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

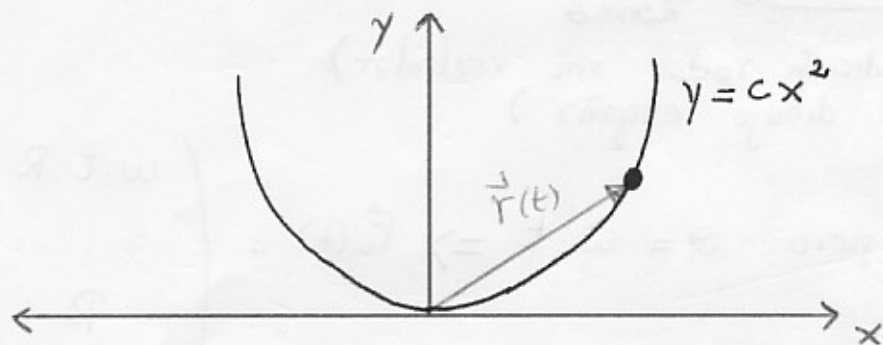
Para obtener $\vec{v}_p(t)$ derivamos $\vec{r}_p(t)$ con respecto al tiempo

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{r}_p(t) = \vec{v}_p(t) = \begin{pmatrix} \omega \cdot R + \omega R \cos(\omega \cdot t) \\ -R \omega \sin(\omega \cdot t) \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos $\vec{v}_p(t)$ y como $\vec{a}_p(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}_p(t)$

$$\Rightarrow \vec{a}_p(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}_p(t) = \dot{\vec{v}}_p = \ddot{\vec{r}}_p(t) = \begin{pmatrix} -\omega^2 R \sin(\omega \cdot t) \\ -\omega^2 R \cos(\omega \cdot t) \end{pmatrix}$$

P3] Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria parabólica definida por la ecuación $y = cx^2$ con una rapidez constante v_0 . Encuentre expresiones para la velocidad \vec{v} y aceleración \vec{a} de la partícula.



Sol:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ c \cdot x(t)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ 2 \cdot c \cdot x(t) \cdot \frac{dx(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ 2c x(t) \cdot \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

Notación: $x(t) = x$ (no olvidar que x depende del tiempo)

$$\text{pero } \|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + 4c^2 x^2 \dot{x}^2} = v_0$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 + 4c^2 x^2 \dot{x}^2 = v_0^2$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{v_0^2}{(1 + 4c^2 x^2)}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{v_0^2}{(1 + 4c^2 x^2)}} = \frac{v_0}{(1 + 4c^2 x^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{N}(t) = \frac{N_0}{(1+4c^2x^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2cx \end{pmatrix}$$

Ahora $\vec{Q}(t) = \frac{d\vec{N}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 2cx\dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 2c\dot{x}^2 + 2cx\ddot{x} \end{pmatrix}$

pero $\dot{x} = N_0 \cdot (1+4c^2x^2)^{-1/2}$

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} \dot{x} = N_0 \cdot \frac{d}{dt} (1+4c^2x^2)^{-1/2}$$

$$= N_0 \cdot \frac{-1}{2} (1+4c^2x^2)^{-3/2} \cdot 8c^2x \cdot \dot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = N_0 \cdot \frac{-1}{2} (1+4c^2x^2)^{-3/2} \cdot 8 \cdot c^2 \cdot x \cdot N_0 \cdot (1+4c^2x^2)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{-4 \cdot N_0^2 \cdot c^2 \cdot x}{(1+4c^2x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \vec{Q}(t) = \begin{pmatrix} \frac{-4 N_0^2 c^2 x}{(1+4c^2x^2)^2} \\ \frac{2c N_0^2}{(1+4c^2x^2)^2} - \frac{2cx \cdot 4 N_0^2 c^2 x}{(1+4c^2x^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \frac{-4 N_0^2 c^2 x}{(1+4c^2 x^2)^2} \\ \frac{2c N_0^2 - 8c^3 N_0^2 x^2}{(1+4c^2 x^2)^2} \\ \frac{-4 N_0^2 c^2 x}{(1+4c^2 x^2)^2} \\ \frac{2c N_0^2 (1-4c^2 x^2)}{(1+4c^2 x^2)^2} \end{pmatrix}$$

pero notemos que tanto \vec{r} , \vec{v} , \vec{a} dependen de $x(t)$

\Rightarrow pueden considerarse como $\vec{r}(x(t))$, $\vec{v}(x(t))$, $\vec{a}(x(t))$

lo que nos permite conocer \vec{r} , \vec{v} y \vec{a} de acuerdo a la pos. que la partícula tenga en el eje x .