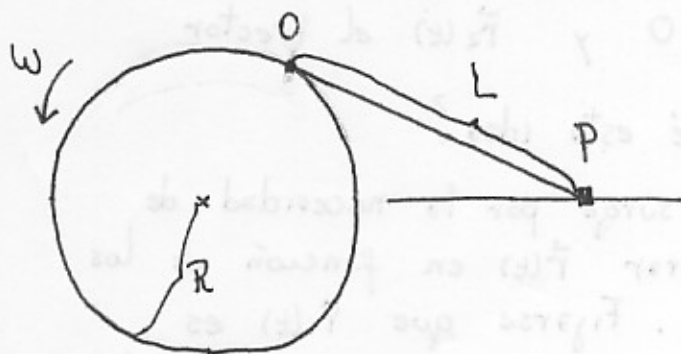


# P1) Problema Biela.

(1)

Se tiene un sistema como el de la figura de modo que el disco de radio  $R$  gira con rapidez constante  $\omega$ .



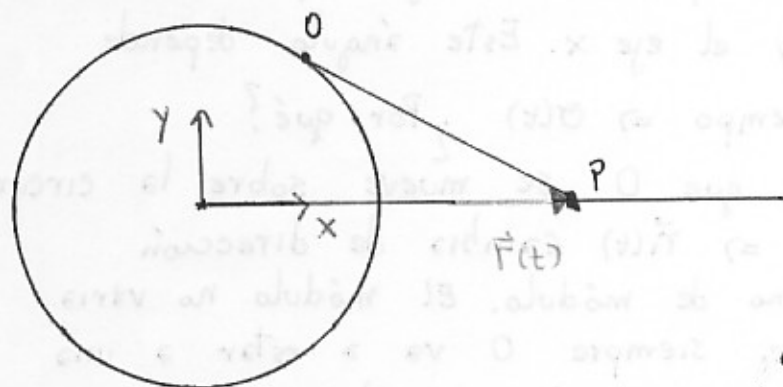
La barra de largo  $L$  esta sujeta en un extremo al disco y en su otro extremo esta obligado a moverse horizontalmente.

Encontrar  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{v}(t)$  y  $\vec{a}(t)$  del punto  $P$ .

Sol:

Como primer paso debemos fijar nuestro sistema de referencia para poder escribir nuestros vectores. Debido a que de por medio existe un mov. circular lo más lógico es ubicar nuestro sistema de referencia en el centro del disco.

Entonces:

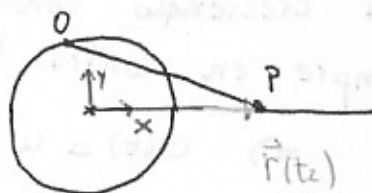
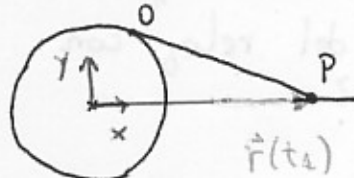


El vector posición del punto  $P$  es aquel vector que nace en el origen y muere en el punto  $P$ .

Debido a que  $P$  está

obligado a moverse horizontalmente este vector solo tendrá componente según el eje  $x$ , pero su magnitud

será variable en el tiempo, es decir:

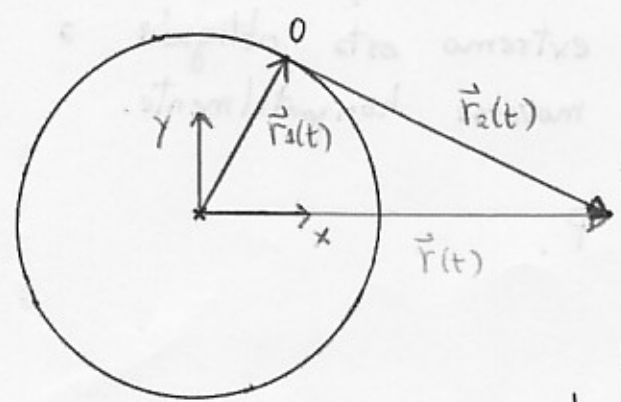


②

Notemos que el mov. de P depende directamente del mov. circular que realiza el extremo O de la barra fijo al disco. Debido a esto podemos escribir el vector  $\vec{r}(t)$  como la suma de dos vectores:  $\vec{r}_1(t)$  y  $\vec{r}_2(t)$  tq:  $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)$  donde  $\vec{r}_1(t)$  es el vector posición de O y  $\vec{r}_2(t)$  el vector que va desde O a P.

¿Por qué esta idea?

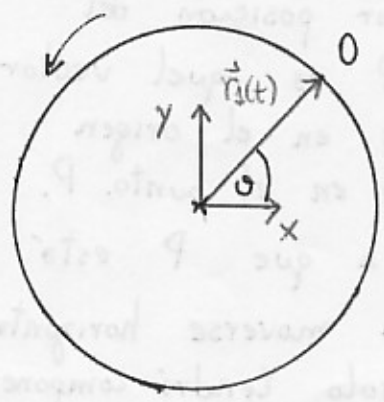
Esto surge por la necesidad de encontrar  $\vec{r}(t)$  en función de los datos. Fijarse que  $\vec{r}_1(t)$  es conocido debido a que O realiza un mov. circular, análisis que ya hicimos en clases (de todas maneras nuevamente será realizado)



y el vector  $\vec{r}_2(t)$  representa a la barra que une a O con P. El módulo de  $\vec{r}_2(t)$  es cte = L, ya que la barra no se estira, solo cambia su orientación en el espacio.

Entonces:

1º Calculemos  $\vec{r}_1(t)$ .



Llamemos por  $\theta$  el ángulo que existe entre  $\vec{r}_1(t)$  y el eje x. Este ángulo depende del tiempo  $\Rightarrow \theta(t)$  ¿Por qué?

Noten que O se mueve sobre la circunferencia  $\Rightarrow \vec{r}_1(t)$  cambia de dirección pero no de módulo. El módulo no varía ya que siempre O va a estar a una

distancia R del centro. Entonces como  $\vec{r}_1(t)$  cambia de dirección, el ángulo  $\theta$  irá variando con el tiempo. Debido a que el disco gira siempre en contra las manecillas del reloj con rapidez cte  $\omega \Rightarrow \theta(t) = \omega \cdot t$  ¿Por qué?

En clases vimos que las ecuaciones en 1-D.

③

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + \underbrace{\dot{x}_0}_{v_0} \cdot t + x_0 ; \quad \dot{x}(t) = a \cdot t + \dot{x}_0$$

(donde  $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \text{veloc. lineal.}$ )

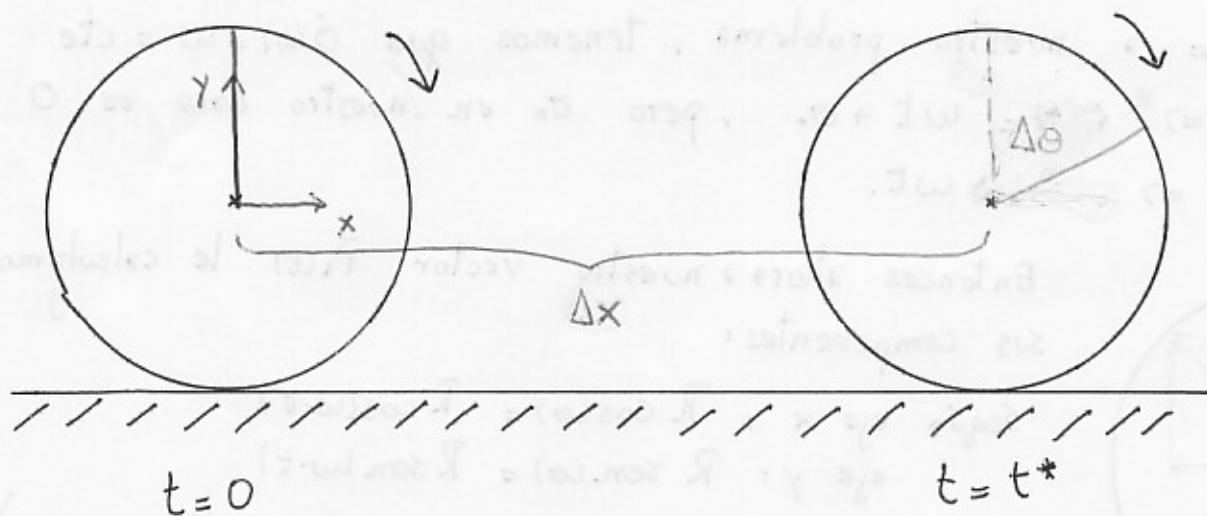
tb se cumplen para los ángulos, es decir:

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \dot{\theta}_0 \cdot t + \theta_0 ; \quad \dot{\theta}(t) = \alpha \cdot t + \dot{\theta}_0$$

donde  $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \text{veloc. angular}$  y  $\alpha = \text{aceleración angular}$

Brevemente veamos de donde viene esto:

Consideren un disco de radio  $R$  que rueda sin resbalar sobre una superficie lisa.



Veamos que la distancia recorrida  $\Delta x$  por el centro del disco debe ser igual a la longitud de arco  $\Delta \theta \cdot R$

(condición rodar sin resbalar)  $\Rightarrow \Delta x = \Delta \theta \cdot R$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \cdot R \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \cdot R$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \dot{\theta}(t) \cdot R \quad (v_x(t) = v_\theta(t) \cdot R)$$

Ahora:  $\Delta v_x = \Delta v_\theta \cdot R \Rightarrow \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\Delta v_\theta}{\Delta t} \cdot R \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_\theta}{\Delta t} \cdot R$

$$\Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_\theta}{dt} \cdot R \Rightarrow \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\text{acel. lineal}} = \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\text{acel. angular}} \cdot R \Rightarrow \underline{a = \alpha \cdot R} \quad (\ddot{x}(t) = \ddot{\theta}(t) \cdot R, \text{Notación})$$

Escribo así porque asumimos  $a$  y  $\alpha$  ctes.

Tenemos entonces que:

$$x = \theta \cdot R$$

$$\dot{x} = \dot{\theta} \cdot R$$

$$a = \ddot{\theta} \cdot R$$

Si Reemplazamos en  $x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + \dot{x} \cdot t + x_0$

$$\Rightarrow \theta(t) \cdot R = \frac{1}{2} \ddot{\theta} \cdot R \cdot t^2 + \dot{\theta}_0 \cdot R \cdot t + \theta_0 \cdot R$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t^2 + \dot{\theta}_0 \cdot t + \theta_0}$$

y si Reemplazamos en  $\dot{x}(t) = a \cdot t + \dot{x}_0$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(t) \cdot R = \ddot{\theta} \cdot R \cdot t + \dot{\theta}_0 \cdot R$$

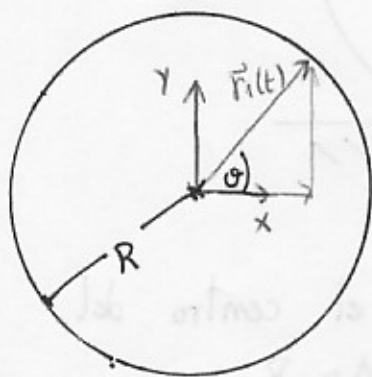
$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta} \cdot t + \dot{\theta}_0}$$

Ahora, volviendo a nuestro problema, tenemos que  $\dot{\theta}(t) = \omega = \text{cte}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta(t) = \omega t + \theta_0$ , pero  $\theta_0$  en nuestro caso es 0

$$\Rightarrow \theta(t) = \omega t.$$

Entonces ahora a nuestro vector  $\vec{r}_1(t)$  le calculamos sus componentes:

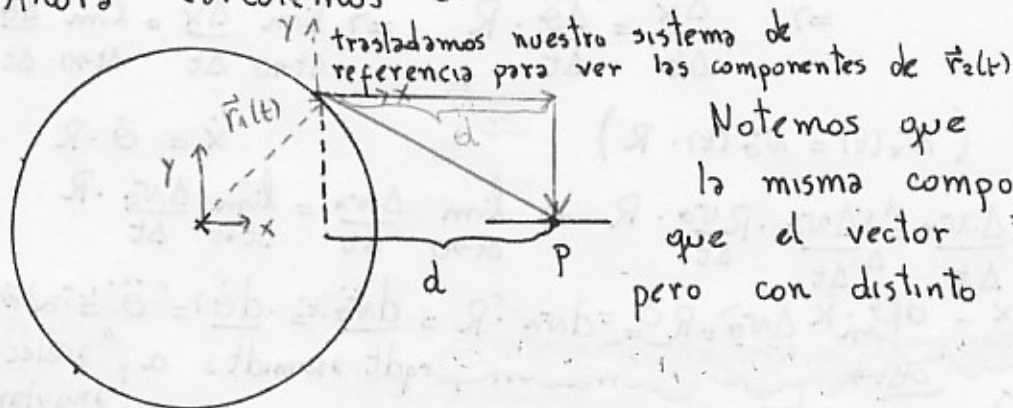


$$\text{Según eje } x : R \cos(\theta) = R \cos(\omega \cdot t)$$

$$\text{eje } y : R \sin(\theta) = R \sin(\omega \cdot t)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1(t) = R \cos(\omega t) \hat{i} + R \sin(\omega t) \hat{j} = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos el vector  $\vec{r}_2(t)$ :



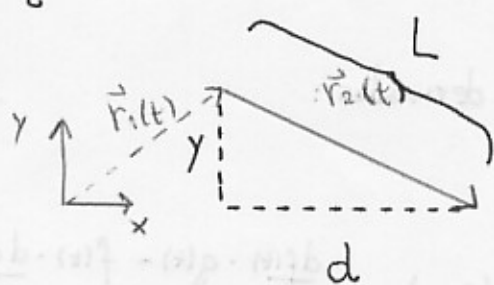
Notemos que en eje  $y$   $\vec{r}_2(t)$  tiene la misma componente (= magnitud) que el vector  $\vec{r}_1(t)$  en el eje  $y$  pero con distinto signo.



(5)

$$\Rightarrow \vec{r}_2(t) = d\hat{i} - R\sin(\omega t)\hat{j} = \begin{pmatrix} d \\ -R\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Pero ¿d?



Por Pitágoras

$$d^2 + y^2 = L^2$$

$$\Rightarrow d^2 = L^2 - y^2$$

$$\text{pero } y = R\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow d^2 = L^2 - R^2\sin^2(\omega t)$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{L^2 - R^2\sin^2(\omega t)}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{L^2 - R^2\sin^2(\omega t)} \\ -R\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{L^2 - R^2\sin^2(\omega t)} \\ -R\sin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) + \sqrt{L^2 - R^2\sin^2(\omega t)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que  $\vec{r}(t)$  sólo tiene componente según  $x$  tal como ya lo habíamos dicho.

Ahora calculemos  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) + \sqrt{L^2 - R^2\sin^2(\omega t)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(R\cos(\omega t) + \sqrt{L^2 - R^2\sin^2(\omega t)}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} (R \cos(\omega t) + \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}) = \frac{d}{dt} (R \cos(\omega t)) + \frac{d}{dt} (\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}) \quad (6)$$

$\downarrow$   
 por prop.  
vista.

Antes de continuar, un breve repaso de derivadas:

$$\frac{d}{dt} (f(t) + g(t)) = \frac{d}{dt} f(t) + \frac{d}{dt} g(t)$$

$$\frac{d}{dt} (f(t) \cdot g(t)) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot \frac{d}{dt} g(t); \frac{d}{dt} \left( \frac{f(t)}{g(t)} \right) = \frac{\frac{d}{dt} f(t) \cdot g(t) - f(t) \cdot \frac{d}{dt} g(t)}{g(t)^2}$$

$$\frac{d}{dt} c = 0 \quad (c = \text{cte.})$$

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = \frac{df(g(t))}{dg(t)} \cdot \frac{dg(t)}{dt} \quad (\text{Regla de la cadena})$$

$$\frac{d}{dt} t^m = m t^{m-1}$$

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

Veamos pg  $\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cos(\omega t)$  (Propuesto:  $\frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t)$ )  
comprobar

Consideremos:

$$\sin(\omega t) = \sin(f(t)) ; f(t) = \omega \cdot t$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sin(f(t)) = \frac{d \sin(f(t))}{df(t)} \cdot \frac{df(t)}{dt} = \cos(f(t)) \cdot \frac{d(\omega \cdot t)}{dt}^*$$

$\downarrow$   
 regla de  
la cadena

$$= \cos(f(t)) \cdot \omega = \omega \cos(\omega t) //$$

$$* \frac{d(\omega \cdot t)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot t + \omega \cdot \frac{dt}{dt} = \omega$$

$\omega$  no depende de  $t$ , es cte para  $t$ .

El término:  $\frac{d}{dt} (\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2(\omega t)})$  no lo calcularemos ahora ⑦

debido a la complejidad que trae desarrollarlo. Por ahora no existe la suficiente experiencia en derivación como para hacerlo. Eso sí podemos ver lo que pasa con:  $\frac{d}{dt} (R \cos(\omega t))$

Entonces:

$$\frac{d}{dt} (R \cos(\omega t)) = \frac{dR}{dt} \cdot \cos(\omega t) + R \cdot \frac{d}{dt} \cos(\omega t) = R \cdot -\sin(\omega t) \omega$$

$\downarrow$   
 $0 \text{ (R=cte.)}$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega \sin(\omega t) + \frac{d}{dt} (\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -R\omega \sin(\omega t) + \frac{d}{dt} (\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$   
notación

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} (-R\omega \sin(\omega t)) + \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} (\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}) \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

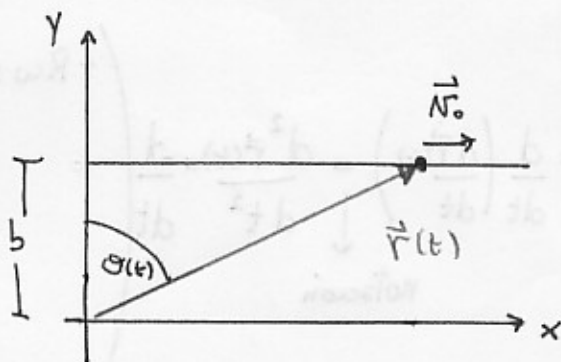
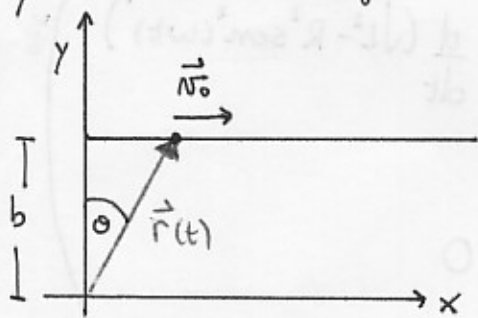
$$\frac{d}{dt} (-R\omega \sin(\omega t)) = \frac{d}{dt} (-R\omega) \sin(\omega t) + -R\omega \frac{d}{dt} \sin(\omega t) = -R\omega^2 \cos(\omega t)$$

$\downarrow$   
 $(-R\omega = \text{cte}) \quad 0$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos(\omega t) + \frac{d}{dt^2} (\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Nota: Lo importante de este ejercicio es poder calcular el vector posición  $\vec{r}(t)$  del punto P. Obtener los vectores velocidad y aceleración consiste en derivar una y dos veces c/r al tiempo el vector posición  $\vec{r}(t)$ . En particular este ejemplo arroja términos complicados de derivar que por el momento no es necesario hacerlo.

P2 Consideremos una partícula que se mueve en línea recta con velocidad cte. como sale en la fig. Encontrar  $\dot{\theta}$  en función de  $\theta$  y  $r(t)$ . ( $r(t)$  largo de  $\vec{r}(t)$ ).

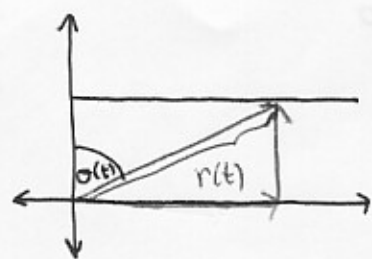


Sol:

Notemos que la magnitud o largo de nuestro vector posición varía con respecto al tiempo. (No es cte. el largo como en el caso del mov. circular). A su vez no conocemos alguna ec. que nos dé una expresión  $\theta(t)$  debido al tipo del mov., es por eso que nos piden calcular  $\dot{\theta}$ , ya que sabemos que  $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$  y si integramos conoceremos  $\theta(t)$ . Integración es una herramienta que no está a nuestro alcance y es por eso que el ejercicio consiste en sólo encontrar expresión para  $\dot{\theta}(t)$ .



Encontramos  $\vec{r}(t)$



$\vec{r}(t)$ :

según eje x:  $r(t) \cdot \cos(90 - \theta(t)) = r(t) \cdot \sin(\theta(t))$

y:  $r(t) \cdot \sin(90 - \theta(t)) = r(t) \cdot \cos(\theta(t))$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cdot \sin(\theta(t)) \\ r(t) \cdot \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

Sabemos que la partícula se mueve con veloc. cte  $= \vec{v}_0$

$$\Rightarrow \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (sólo componente en } x, v_0 = \text{rapidez)}$$

Sabemos que

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t), \text{ en este caso } \vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r(t) \cdot \sin(\theta(t)) \\ r(t) \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} (r(t) \cdot \sin(\theta(t))) \\ \frac{d}{dt} (r(t) \cdot \cos(\theta(t))) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} r(t) \cdot \sin(\theta(t)) + r(t) \cdot \frac{d}{dt} \sin(\theta(t)) \\ \frac{d}{dt} r(t) \cdot \cos(\theta(t)) + r(t) \cdot \frac{d}{dt} \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pero  $\downarrow$   $\frac{d}{dt} \sin(\theta(t)) = \frac{d \sin(\theta(t))}{d \theta(t)} \cdot \frac{d \theta(t)}{dt} = \cos \theta(t) \cdot \dot{\theta}(t)$   
regla  
cadena

$\downarrow$   $\frac{d}{dt} \cos(\theta(t)) = \frac{d \cos(\theta(t))}{d \theta(t)} \cdot \frac{d \theta(t)}{dt} = -\sin \theta(t) \cdot \dot{\theta}(t)$   
regla  
cadena

Antes (en el ej. anterior) conocíamos una expresión para  $\theta(t)$  debido al mov. circular y por eso sabíamos que  $\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d(\omega t)}{dt} = \omega$ . Ahora solo

dejamos  $\frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t)$  (Es lo que nos piden)

Entonces

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \sin(\theta(t)) + r(t) \cdot \cos(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \\ \dot{r}(t) \cdot \cos(\theta(t)) - r(t) \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtengo el sist. de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{r}(t) \sin(\theta(t)) + r(t) \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) &= v_0 & / \cdot \cos(\theta(t)) \\ \dot{r}(t) \cos(\theta(t)) - r(t) \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) &= 0 & / \cdot -\sin(\theta(t)) \end{aligned}$$

$$\dot{r}(t) \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) + r(t) \cos^2(\theta(t)) \dot{\theta}(t) = v_0 \cdot \cos(\theta(t))$$

$$\Rightarrow -\dot{r}(t) \cos(\theta(t)) \cdot \sin(\theta(t)) + r(t) \sin^2(\theta(t)) \dot{\theta}(t) = 0$$

Sumando ambas ecs:

$$\Rightarrow r(t) \cos^2(\theta(t)) \dot{\theta}(t) + r(t) \sin^2(\theta(t)) \dot{\theta}(t) = v_0 \cos(\theta(t))$$

$$\Rightarrow r(t) \dot{\theta}(t) = v_0 \cos(\theta(t))$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}(t) = \frac{v_0 \cdot \cos(\theta(t))}{r(t)}}$$

Sergio Godoy  
Aux FIAA-02