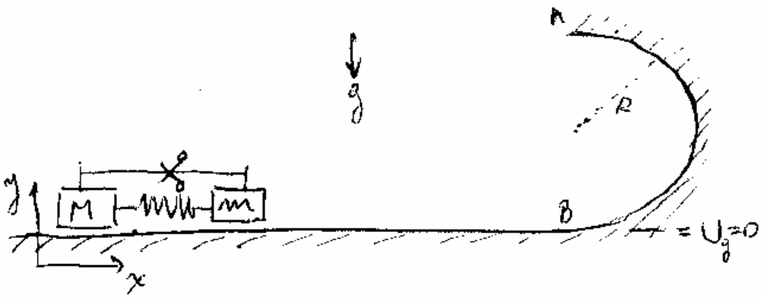


Sobre una superficie sin roce se encuentran dos bloques de masa M y m. Entre ellos hay un resorte de cte elástica k y largo natural l_0, que no se encuentra unido a ninguna de las dos masas, sólo está en el medio. Inicialmente los bloques están unidos por una cuerda de largo $d < l_0$. Si no hay roce en ninguna superficie, encontrar la mínima masa m tal que sea capaz de llegar al punto A. (Entre A y B la superficie es un semicírculo de radio R)

Sol

Necesitamos saber con qué velocidad llega m al punto B. Dado que desde el instante en que pierde contacto con el resorte hasta que llega al punto B no hay fuerzas externas en el eje x, la velocidad se mantendrá constante en ese intervalo. Calculemos con qué velocidad la masa m pierde contacto con el resorte. Entre ese instante y el instante inicial sólo actúa la fuerza del resorte (conservativa), el peso de los bloques (conservativa) y las normales sobre los bloques (no conservativas, pero como actúan perpendiculares a la trayectoria de los bloques, contenida completamente en el eje x, no hacen trabajo) $\Rightarrow$ se conserva la energía mecánica (cinética más potencial).

$$\boxed{W_{TOTAL} = K_f - K_i}$$

$W_{TOTAL} = W_{FC} + W_{FNC}$ es el trabajo de todas las fuerzas, conservativas y no conservativas

K_i, K_f energía cinética inicial y final

Cuando una fuerza es conservativa se puede demostrar que existe una función "energía potencial" de tal manera que:

$W_{FC} = -(U_f - U_i)$ Hasta ahora conocemos las sgtes. fuerzas conservativas

Fuerza del resorte: $\boxed{U_r = \frac{1}{2} k \Delta^2}$ donde Δ es la compresión o elongación del resorte c/r a su largo natural

Fuerza de gravedad: $\boxed{U = -\frac{GMm}{r}}$ que es la energía de un cuerpo de masa m sometido a la gravedad de un cuerpo de masa M (y viceversa)

Para fza gravedad mg $\boxed{U_g = mgh}$ donde h es la atura a la que se encuentra el cuerpo de masa m con respecto a una altura de referencia (definida como el cero) arbitraria, el resultado no depende de donde se elige la altura como cero

El balance de energía es:

$$W_{TOTAL} = K_f - K_i$$

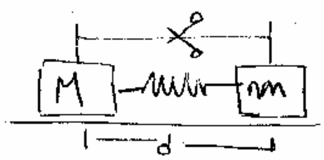
$$W_{FC} + \underbrace{W_{FNC}}_{0} = K_f - K_i$$

$$W_{FC} = K_f - K_i$$

$$-(U_f - U_i) = K_f - K_i$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{K_i + U_i = K_f + U_f}$$

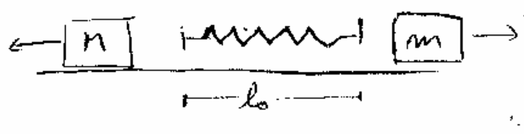
A esto es lo que comúnmente se llama conservación de energía mecánica



$K_i = 0$

$U_i = \frac{1}{2} k (l_0 - d)^2$

La E potencial de gravedad es cero porque elegimos que sea cero al nivel del piso



$K_f = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m v_m^2$ ← ambas masas tienen velocidad

$U_f = 0$ ← el resorte no está comprimido luego $U_i + K_i = U_f + K_f$

$$\frac{1}{2} k (l_0 - d)^2 = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m v_m^2$$

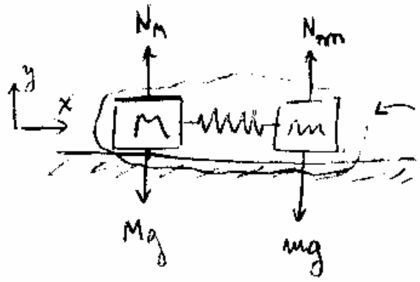
No conocemos v_m ni v_M
Necesitamos otra ecuación.

Conservación de Momentum:

Se define el vector momentum de un sistema de N masas con m_i la masa de cada una $i = 1 \ldots N$ y $\vec{v}_i$ el vector velocidad de cada una, como:

$$\boxed{\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}$$

Esta cantidad se conserva si la suma de fuerzas externas del sistema de masas es cero. Ojo que es posible que se conserve solo una componente del momentum, por ejemplo en un sistema cartesiano se puede conservar solo la componente x.



← sistema M-m-resorte

No hay fuerzas en "x", y las fuerzas en "y" suman cero ⇒ se conserva $\vec{p}$

Inicialmente: $\vec{p}_0 = \vec{0}$

Luego: $\vec{p}_f = M \vec{v}_M \hat{\imath} + m \vec{v}_m \hat{\imath}$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_f \Rightarrow \boxed{0 = M v_M + m v_m}$$

Como v_M y v_m son incógnitas, no se les pone signo, las ecuaciones entregan los signos

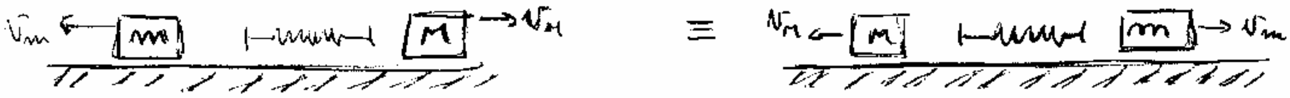
$$v_M = -\frac{m}{M} v_m$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k (l_0 - d)^2 = \frac{1}{2} M \frac{m^2}{M^2} v_m^2 + \frac{1}{2} m v_m^2$$

$$\Rightarrow \frac{M k (l_0 - d)^2}{m (M + m)} = v_m^2$$

$$\Rightarrow \pm \sqrt{\frac{M k (l_0 - d)^2}{m (M + m)}} = v_m$$

Elegimos $+V_m$ ya que sabemos que m sale hacia la derecha.
La ecuación tira la solución negativa ya que a la conservación de energía y momentum le da lo mismo cuál sale para cuál lado



Ahora tenemos la velocidad con que m entra al semicírculo. Notemos que depende de m, si m crece V_m decrece.

$$V_m = \sqrt{\frac{Mk(l_0-d)^2}{m(M+m)}}$$

Que sea capaz de llegar al punto A depende de que:

- A llegar a A posea un movimiento circunferencial
- Para que sea el caso extremo, al momento de llegar a A la masa debería "soltarse" (N=0)

Llamemos V_A a la velocidad con que m llega a A. Para que haya movimiento circunferencial en ese momento, la aceleración de m debe ser la aceleración centrípeta necesaria para movimiento circular. Analicemos ese instante

dcl

$\downarrow\downarrow N$
mg

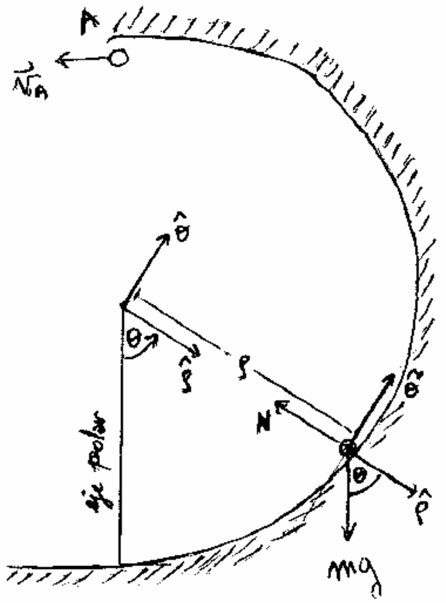
Podemos ubicar un sistema polar justo en el centro del semicírculo

$$-mg\,\hat{\rho} - \underbrace{N}_{0}\,\hat{\rho} = m(-R\dot{\theta}^2\hat{\rho})$$

$$\Rightarrow \cancel{m}g = \cancel{m}R\dot{\theta}^2 \quad \text{pero } R\dot{\theta}^2 = \frac{R^2\dot{\theta}^2}{R} = \frac{V_A^2}{R}$$

$$\Rightarrow g = \frac{V_A^2}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{gR = V_A^2}$$



Newton

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_\rho \hat{\rho} + \sum \vec{F}_\theta \hat{\theta} = m[(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{\theta}]$$

$$-N\hat{\rho} + mg\cos\theta\hat{\rho} - mg\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\theta} = m[-R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + \rho\ddot{\theta}\,\hat{\theta}]$$

ya que $\ddot{\rho} = \dot{\rho} = 0$ $\rho = R$ cte

$\Rightarrow$ 2 ecuaciones, según $\hat{\rho}$, y $\hat{\theta}$

$\hat{\rho}$) $-N + mg\cos\theta = -mR\dot{\theta}^2$

$\hat{\theta}$) $-mg\,\text{sen}\,\theta = mR\ddot{\theta}$

Las ecuaciones de movimiento son válidas para todo t. Lo que se puede hacer es evaluarlas para algún instante, pero no se puede evaluar en un instante y luego resolver como si fuera $\forall t$

<u>En A</u>: $\underline{\theta = \pi}$, $\underline{R\dot{\theta} = v_A}$ (velocidad tangencial, que en este caso es la vel. completa)

Imponemos $\underline{N = 0}$

$\hat{\rho}$) $-\cancel{N}^{\,0} + mg\cos\pi = -mR\dot{\theta}^2 \Rightarrow -mg = -mR\dot{\theta}^2 = -m\dfrac{R^2\dot{\theta}^2}{R}$

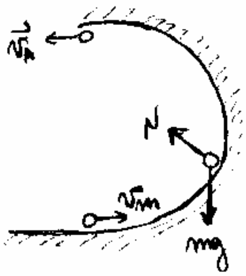
$$\Rightarrow \quad \underline{gR = v_A^2}$$

$\hat{\theta}$) $-mg\,\text{sen}\,\pi = mR\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad 0 = mR\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \ddot{\theta}$$

Esto último significa que la aceleración angular $\ddot{\theta}$ es cero en ese instante, no quiere decir que lo sea para todo el movimiento. Por lo mismo, es incorrecto decir que $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = $ cte

Tenemos que $v_A^2 = gR$, ¿cómo relacionarlo con v_m?



El balance de energía $W_{TOT} = K_f - K_i$ siempre se puede hacer. Lo que sucede es que es conveniente usarlo cuando W_{TOT} es fácil de calcular. Esto sucede cuando las fuerzas son conservativas y cuando el trabajo de las fuerzas no conservativas es fácil de calcular o es cero.

En este caso la fuerza no conservativa es la normal, y como es siempre perpendicular a la trayectoria semicircular, su trabajo es cero.

El peso hace trabajo, pero sabemos que se calcula como $-(U_{gf} - U_{gi})$

Luego:

$$W_{TOT} = K_f - K_i$$

$$W_{FC} + \underbrace{\cancel{W_{FNC}}}_{0} = K_f - K_i$$

$$-(U_{gf} - U_{gi}) = K_f - K_i$$

$$-(mg2R - 0) = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_m^2$$

$$-2mgR = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mv_m^2$$

$$-4gR = v_A^2 - v_m^2$$

$$v_m^2 = gR + 4gR$$

$$v_m^2 = 5gR$$

pero $v_m^2 = \dfrac{Mk(l_0-d)^2}{m(M+m)}$

$\Rightarrow$ $Mk(l_0-d)^2 = 5gR\,m(M+m)$

$\Rightarrow$ ecuación cuadrática para m

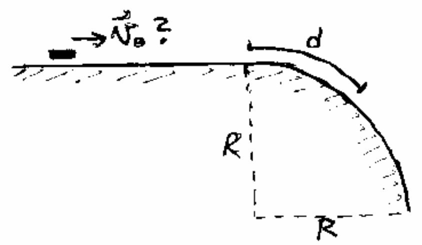
$\Rightarrow$ Solución (tomar sol $m > 0$)

Nota: recuerden que en la expresión de la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2 = K$, la v representa el módulo del vector velocidad, por lo que si ella tiene componentes según dos ejes deben calcular el módulo

Ej: $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$

$\Rightarrow v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

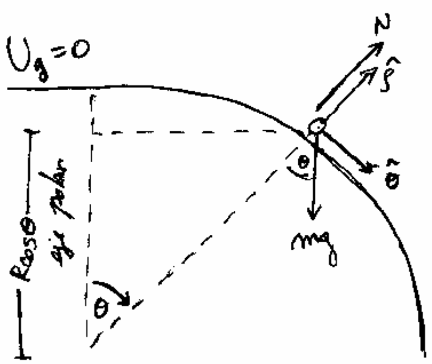
Nota 2: U_g energía potencial de mg fue tomada como cero al nivel del piso.



Una moneda desliza sobre un tramo horizontal sin roce que termina en forma cilíndrica de radio R. La moneda pierde contacto con la superficie luego de deslizar una distancia "d" sobre la parte cilíndrica. Calcular la rapidez de la moneda en el tramo horizontal

Sol

Queremos analizar cuando se pierde el contacto, es decir, cuando la normal se hace cero.



$$\hat{\rho})\quad N - mg\cos\theta = m[\cancel{\ddot{\rho}}^{\,0} - \rho\dot{\theta}^2]$$

$$\Rightarrow \quad \underline{N - mg\cos\theta = -mR\dot{\theta}^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\ddot{\rho} = 0\\ \dot{\rho} = 0\\ \rho = R\end{array}}$$

$$\hat{\theta})\quad \cancel{m}g\,\mathrm{sen}\,\theta = \cancel{m}[\rho\ddot{\theta} + \cancel{2\dot{\rho}\dot{\theta}}^{\,0}]$$

$$\Rightarrow \quad \underline{g\,\mathrm{sen}\,\theta = R\ddot{\theta}}$$

Tenemos ecuaciones para $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ y N, que es una función de θ, que a su vez es una función de t. N NO ES CONSTANTE

Nuevamente debemos relacionar dos instantes, cuando la moneda entra al cuarto de circunferencia (arriba) y cuando se suelta, (cuando se despega, lo que implica $N=0$)

Definimos como cero de la energía potencial U_g el nivel plano

$$W_F = W_{Fc} + \cancel{W_{FNo}}^{\to 0} = K_f - K_i$$

$$-(U_f - U_i) = K_f - K_i$$

$$-(-mg(R - R\cos\theta) - 0) = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 - \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{m}g(R - R\cos\theta) = \frac{1}{2}\cancel{m}(R\dot{\theta})^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}v_o^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{2g(R - R\cos\theta) = (R\dot{\theta})^2 - v_o^2}$$

Notar que mientras la moneda está en la superficie horizontal su velocidad es constante igual a v_o, ya que la suma de fuerzas sobre ella es cero.

Tenismos que:

$$N - mg\cos\theta = -mR\dot{\theta}^2 \quad , \text{hacemos } N = 0 \quad , \quad R\dot{\theta}^2 = \frac{R^2\dot{\theta}^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad -mg\cos\bar{\theta} = -m\frac{R^2\dot{\theta}^2}{R} = -\frac{m}{R}\left[v_o^2 + 2g(R - R\cos\bar{\theta})\right]$$

Donde $\bar{\theta}$ es el ángulo en que se despega la moneda.

Sabemos que el arco mide "d" $\Rightarrow \bar{\theta} = \frac{d}{R}$

$$\Rightarrow \quad -\cancel{m}g\cos\frac{d}{R} = -\frac{\cancel{m}}{R}\left[v_o^2 + 2gR\left(1 - \cos\left(\frac{d}{R}\right)\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad gR\cos\frac{d}{R} = v_o^2 + 2gR - 2gR\cos\frac{d}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_o^2 = 3gR\cos\frac{d}{R} - 2gR}$$

Noten que debe cumplirse que

$$3g\cancel{R}\cos d/R > 2g\cancel{R}$$

$$\cos d/R > 2/3$$