

## Capítulo 6

# Momento lineal y colisiones

### 6.1. Conservación del momento lineal

Consideremos  $N$  partículas, cuyas masas y vectores de posición vienen dados por  $\{m_j\}_j$  y  $\{\vec{r}_j\}_j$ , con  $j = 1, 2, \dots, N$ . Supongamos que sobre cada partícula  $j$  algún agente externo ejerce una fuerza  $\vec{F}_j$ . Supongamos además que las partículas interactúan entre sí, siendo  $\vec{f}_{ji}$  la fuerza que ejerce la partícula  $i$  sobre la partícula  $j$ . Por supuesto, debido al principio de acción y reacción,  $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ , o, en palabras, la fuerza que ejerce la partícula  $j$  sobre la  $i$  es la opuesta a la que la partícula  $i$  ejerce sobre la  $j$ .

Usando la segunda ley de Newton, podemos escribir la ecuación de movimiento de la partícula  $j$ . Se tiene

$$\vec{F}_j + \sum_{i=1}^N \vec{f}_{ji} = m_j \ddot{\vec{r}}_j .$$

Al lado izquierdo se tiene la fuerza total que actúa sobre la partícula  $j$ , mientras que al lado derecho se tiene el producto de la masa por la aceleración de esa partícula. Sumando las ecuaciones de movimiento de todas las partículas (es decir, sumando sobre  $j$ ), se obtiene

$$\sum_j \vec{F}_j + \sum_{i,j} \vec{f}_{ji} = \sum_j m_j \ddot{\vec{r}}_j . \quad (6.1)$$

Note que, debido al principio de acción y reacción,  $\sum_{i,j} \vec{f}_{ji} = 0$ , es decir, la suma de todas las fuerzas internas es nula. Definamos la magnitud

$$\vec{r}_{cm} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j , \quad (6.2)$$

donde  $M \equiv m_1 + m_2 + \dots + m_N$  es la masa total. Derivando la última ecuación dos veces respecto al tiempo, queda

$$M \ddot{\vec{r}}_{cm} = \sum_{j=1}^N m_j \ddot{\vec{r}}_j .$$

Sustituyendo esta expresión en (7.1), y usando la relación  $\sum_{ij} \vec{f}_{ji} = 0$ , se obtiene

$$\sum_{j=1}^N \vec{F}_j = M \ddot{\vec{r}}_{cm} .$$

La suma  $\sum_j \vec{F}_j$  corresponde a la fuerza externa total que actúa sobre las partículas, magnitud que denotaremos por  $\vec{F}_{tot}$ . De esta manera, finalmente

$$\vec{F}_{tot} = M \ddot{\vec{r}}_{cm} . \quad (6.3)$$

Esta última ecuación no depende de las *fuerzas internas* que actúan entre las distintas partículas. Al vector  $\vec{r}_{cm}$  se le denomina *posición del centro de masas*. La ecuación (6.3) enseña que la suma de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de partículas acelera al centro de masas como si toda la masa del sistema estuviese centrada allí.

Si la fuerza (externa) total sobre el sistema de partículas es nula, o sea, si  $\vec{F}_{tot} = \sum_j \vec{F}_j = 0$ , entonces el centro de masas no acelera. En ese caso, la velocidad del centro de masas es constante (designemos por  $\vec{v}_{cm}^{(0)}$  a tal velocidad). Por otra parte, la velocidad del centro de masas se puede obtener derivando la ecuación (6.2) respecto al tiempo:

$$\dot{\vec{r}}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j = \vec{v}_{cm}^{(0)} .$$

Introduciendo la definición de *momento lineal*  $\vec{p}_j = m_j \dot{\vec{r}}_j$  de cada partícula, la última ecuación se puede reescribir de la forma

$$\vec{P}_{tot} \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = M \vec{v}_{cm}^{(0)} . \quad (6.4)$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de *Principio de Conservación del Momento Lineal*. En palabras: cuando la fuerza externa total que actúa sobre un sistema de partículas es cero (observe que la fuerza no tiene por qué ser igual a cero individualmente sobre cada una de las partículas), entonces la suma de los momentos lineales de las distintas partículas (o sea, el momento lineal total) no varía en el tiempo, es decir, se mantiene constante (aun cuando las partículas interactúen entre sí). Cuando la fuerza externa total sobre un sistema de partículas es cero, entonces la suma de todos los momentos lineales de las partículas en todo instante será la misma.

Ilustremos los conceptos anteriores con un ejemplo.

**Problema:** Considere dos masas,  $m = m_0$  y  $M = 3m_0$ , sobre las cuales no actúan fuerzas externas. Supongamos que en el instante  $t = 0$ , la partícula  $m$  se encuentra en el origen y en reposo, y que la partícula  $M$  se encuentra en  $\vec{r}_M(0) = 2\hat{x}$  [m] moviéndose con una velocidad  $\vec{v}_M(0) = 4\hat{y}$  [m/s]. Supongamos además que existe cierta interacción entre las partículas y, como consecuencia de ella, ambas aceleran. Si en el instante  $t_0 = 5$  [s] la partícula  $m$  se encuentra en  $\vec{r}_m(t_0) = (-2\hat{x} - 8\hat{y})$  [m], ¿en qué lugar se encontrará la otra

masa?

Solución: Como no hay fuerzas externas, el centro de masas se mueve con velocidad constante. Encontramos primero la velocidad del centro de masas y la posición de éste en los instantes  $t = 0$  y  $t = 5$  [s]. En efecto

$$\vec{r}_{cm}(0) = \frac{m \cdot \vec{r}_m(0) + M \cdot \vec{r}_M(0)}{m + M} = \frac{3m_0 \cdot 2\hat{x}}{m_0 + 3m_0} = \frac{3}{2}\hat{x} \text{ [m]}$$

y

$$\vec{v}_{cm}(0) = \frac{m \cdot \vec{v}_m(0) + M \cdot \vec{v}_M(0)}{m + M} = \frac{3m_0 \cdot 4\hat{y}}{m_0 + 3m_0} = 3\hat{y} \text{ [m/s]} .$$

Como la velocidad del centro de masas es constante, en el instante  $t_0 = 5$  [s] el centro de masas se encontrará en

$$\vec{r}_{cm}(t_0) = \vec{r}_{cm}(0) + \vec{v}_{cm}(0) \cdot t_0 = \left[ \frac{3}{2}\hat{x} + 3 \cdot 5\hat{y} \right] \text{ [m]} .$$

Por otra parte, en el instante  $t_0$  la posición del centro de masas viene dada por

$$\begin{aligned} \vec{r}_{cm}(t_0) &= \frac{m\vec{r}_m(t_0) + M\vec{r}_M(t_0)}{m + M} \\ &= \frac{m_0(-2\hat{x} - 8\hat{y}) + 3m_0\vec{r}_M(t_0)}{m_0 + 3m_0} = \frac{1}{4}(-2\hat{x} - 8\hat{y} + 3\vec{r}_M(t_0)) \text{ [m]} . \end{aligned}$$

Igualando las dos ecuaciones para  $\vec{r}_{cm}(t_0)$  podemos despejar  $\vec{r}_M(t_0)$ :

$$\frac{1}{4}(-2\hat{x} - 8\hat{y} + 3\vec{r}_M(t_0)) \text{ [m]} = \left[ \frac{3}{2}\hat{x} + 3 \cdot 5\hat{y} \right] \text{ [m]} ,$$

de donde se deduce que

$$\vec{r}_M(t_0) = \frac{1}{3}(8\hat{x} + 68\hat{y}) \text{ [m]} .$$

‘!Grafique en el plano  $(\hat{x}, \hat{y})$  los vectores  $\vec{r}_m$ ,  $\vec{r}_M$  y  $\vec{r}_{cm}$  en los instantes  $t = 0$  y  $t = 5$  s!

## 6.2. Colisiones

Analicemos primeramente colisiones en una dimensión. Considere dos partículas de masas  $m$  y  $M$ , restringidas a moverse (sin roce) a lo largo del eje  $\hat{x}$  y estudiemos algunos casos particulares.

- a) Supongamos que la partícula  $M$  incide desde la izquierda con velocidad  $+v_0$  y se mueve hacia la partícula  $m$ , que inicialmente se encuentra en reposo. Suponga que las dos partículas colisionan, quedando una adosada a la otra, formando una única partícula de masa  $(M + m)$ . ¿Con qué velocidad  $\tilde{v}$  se moverá esta nueva partícula después de la colisión?

Para resolver este problema usamos el principio de conservación del momento lineal. Sobre el sistema no hay fuerzas externas actuando, luego el momento lineal se conserva. El momento lineal total antes de la colisión es

$$P_{tot}^{(i)} = Mv_0 + m \cdot 0 = Mv_0 ,$$

mientras que después de la colisión es

$$P_{tot}^{(f)} = (M + m) \tilde{v} .$$

Estas dos expresiones deben ser iguales, luego

$$\tilde{v} = \frac{M}{M + m} v_0 .$$

En el límite  $M \gg m$  (el caso de una locomotora chocando con una mosca) la velocidad después de la colisión es  $\tilde{v} \simeq v_0$  (la velocidad de la locomotora). En el límite  $M \ll m$  (el caso de una mosca chocando contra una locomotora en reposo) la velocidad después de la colisión es  $\tilde{v} \simeq 0$ .

La energía cinética antes y después de la colisión no es la misma, siendo la diferencia

$$\begin{aligned} Q \equiv K_f - K_i &= \frac{1}{2}(M + m)\tilde{v}^2 - \frac{1}{2}Mv_0^2 \\ &= -\frac{1}{2}Mv_0^2 \frac{m}{M + m} . \end{aligned}$$

A esta diferencia se le suele llamar *el valor  $Q$  de la reacción*. Cuando, como en el presente ejemplo,  $Q \neq 0$ , la colisión se dice que es *inelástica*. Si  $Q < 0$ , la colisión es *endotérmica*—parte de la energía que el sistema tenía antes de la colisión se difunde a *grados de libertad internos* del sistema (por ejemplo, se “pierde” como calor). Si  $Q > 0$  la colisión (o reacción) es *exotérmica*.

- b) Consideremos ahora el caso de una colisión en que se conserva la energía cinética (o sea, una colisión con  $Q = 0$ ) y además se conserva la identidad de las partículas (es decir, el número de ellas y sus masas). Tales colisiones se denominan *elásticas*. Nuevamente supongamos que la partícula  $M$  incide desde la izquierda, a lo largo del eje  $\hat{x}$ , con velocidad  $+v_0$  y que choca con la partícula  $m$ , que inicialmente se encuentra en reposo. Encontramos la velocidad final  $\tilde{v}_m$  y  $\tilde{v}_M$  de cada una de las partículas. Para resolver este problema invocamos la conservación del momento lineal y de la energía (cinética). Se tiene

$$Mv_0 = m\tilde{v}_m + M\tilde{v}_M$$

y

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}m\tilde{v}_m^2 + \frac{1}{2}M\tilde{v}_M^2 .$$

De estas dos ecuaciones podemos despejar las dos incógnitas  $\tilde{v}_m$  y  $\tilde{v}_M$ . Se obtiene

$$\tilde{v}_m = \frac{2M}{M + m} v_0$$

y

$$\tilde{v}_M = \frac{M - m}{M + m} v_0.$$

Analicemos varios casos límites:

- i)  $M \gg m$  (o sea, una locomotora con velocidad  $v_0$  colisionando con una pelota de tenis en reposo). En este límite,  $\tilde{v}_M = v_0$  y  $\tilde{v}_m = 2v_0$  (es decir, la locomotora seguirá como si nada hubiese pasado mientras que la pelota de tenis sale disparada con una velocidad igual al doble de la velocidad de la locomotora).
- ii)  $M \ll m$  (o sea, una pelota con velocidad  $v_0$  colisionando con una locomotora en reposo). En este límite,  $\tilde{v}_m \simeq 0$  y  $\tilde{v}_M = -v_0$  (es decir, la locomotora prácticamente no se moverá y la pelota rebota con una rapidez igual a la incidente). Que la velocidad  $\tilde{v}_M$  en este caso sea negativa significa que la partícula se mueve en la dirección  $-\hat{x}$ .
- iii)  $M = m$  (o sea, la colisión central de dos bolas de billar de igual masa). En ese caso  $\tilde{v}_m = v_0$  y  $\tilde{v}_M = 0$  (es decir, la partícula incidente queda en reposo mientras que la otra partícula sale disparada con velocidad  $v_0$ ).

Si la colisión no ocurre a lo largo de una línea recta, sino que ocurre en un plano, los conceptos involucrados son los mismos y lo único que cambia es que la ley de conservación del momento lineal, siendo una ecuación vectorial, nos dará una relación para cada una de las componentes. Demos un ejemplo.

**Problema:** Considere una masa  $m_1$  que choca elásticamente contra una masa  $m_2$  originalmente en reposo. Suponga que después del choque la masa incidente  $m_1$  emerge en una dirección perpendicular a su dirección original (ver figura 6.1). Encuentre:

- a) El ángulo  $\theta$  con que emerge  $m_2$ , en función de  $m_1$  y  $m_2$ .
- b) La velocidad  $v_1$  con que emerge  $m_1$ .
- c) La velocidad  $v_2$  con que emerge  $m_2$ .

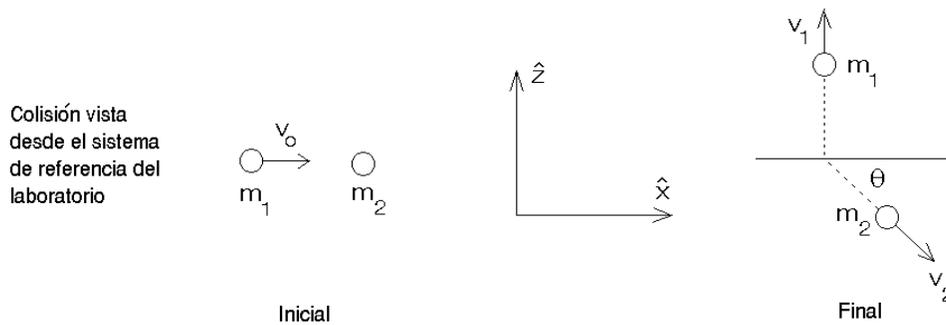


Figura 6.1

**Solución:** La energía y el momento lineal total, antes y después de la colisión son:

$$E_i = \frac{1}{2}m_1v_0^2,$$

$$\vec{p}_i = m_1v_0\hat{x},$$

$$E_f = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2,$$

$$\vec{p}_f = m_1v_1\hat{z} + m_2v_2\cos\theta\hat{x} - m_2v_2\sin\theta\hat{z}.$$

Debido a que el choque es elástico, se conserva la energía total y el momento lineal total; esto nos da las ecuaciones:

$$m_1v_0^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2,$$

$$m_1v_0 = m_2v_2\cos\theta$$

y

$$m_1v_1 - m_2v_2\sin\theta = 0.$$

Estas son tres ecuaciones con tres incógnitas (las incógnitas son:  $v_1$ ,  $v_2$  y  $\theta$ ). Resolviendo este sistema de ecuaciones se encuentra:

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}},$$

$$v_2 = v_0\sqrt{\frac{2m_1^2}{m_2(m_2 + m_1)}}$$

y

$$\tan\theta = \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}}.$$

Note que el problema sólo tiene solución si  $m_2 > m_1$ .

En la sección 6.6 ilustramos los conceptos anteriores con otro ejemplo.

### 6.3. Impulso

De acuerdo a la segunda ley de Newton  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ . Multiplicando por  $dt$  e “integrando” se obtiene

$$\int_i^f \vec{F} dt = \int_i^f d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i,$$

o sea, el cambio de momento que sufre una partícula en cierto intervalo de tiempo es igual a la integral de  $\vec{F} dt$  durante ese intervalo. A la integral  $\int \vec{F} dt$  se le llama *impulso*.

Cuando ocurre una colisión entre dos objetos, el tiempo de colisión puede ser muy pequeño, el momento transferido sin embargo puede ser grande. Por ejemplo, cuando una bolita de acero, al caer desde una altura  $h$ , rebota (elásticamente) por una superficie dura. Al llegar

a la superficie la bolita tendrá la velocidad  $-\sqrt{2gh}\hat{z}$  y justo después del rebote  $\sqrt{2gh}\hat{z}$ . El cambio de momento es, por lo tanto,

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = 2m\sqrt{2gh}\hat{z}.$$

Este cambio de momento debe ser igual al impulso transmitido por el suelo a la bolita, es decir,

$$\int_i^f \vec{F}(t) dt = 2\sqrt{2gh}\hat{z}.$$

Durante la colisión, típicamente la fuerza que ejerce un cuerpo sobre tiene el comportamiento como el mostrado en la figura 6.2. Antes de la colisión la fuerza es nula. En el instante  $t_0 - \epsilon_1$  los cuerpos entran en contacto, la fuerza aumenta rápidamente llegando a un máximo en cierto instante  $t_0$  para luego decrecer nuevamente a cero (instante  $t_0 + \epsilon_2$ ). Los cuerpos están en contacto durante un intervalo de tiempo  $\epsilon_1 + \epsilon_2$ .

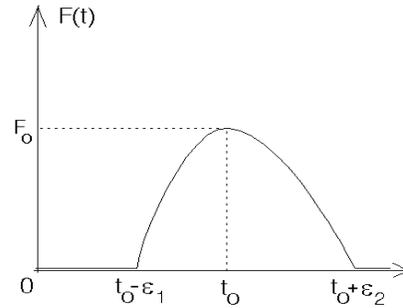


Figura 6.2

El área bajo la curva  $F(t)$  es el impulso (momento) transmitido de un cuerpo al otro.

Típicamente el comportamiento  $F(t)$  puede ser representado por una parábola

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \left[1 - \frac{1}{\epsilon^2} (t - t_0)^2\right] & \text{para } t_0 - \epsilon < t < t_0 + \epsilon \\ 0 & \text{para } t < t_0 - \epsilon \text{ y } t > t_0 + \epsilon \end{cases}.$$

En este caso los cuerpos se mantienen en contacto durante un tiempo  $2\epsilon$ , siendo en el instante  $t = t_0$  la fuerza máxima ( $F_0$ ) entre los cuerpos. El impulso transmitido es

$$\Delta p = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} F_0 \left[1 - \frac{1}{\epsilon^2} (t - t_0)^2\right] dt = \frac{4}{3} F_0 \epsilon.$$

Con este modelo para  $F(t)$ , en el caso de la bolita obtenemos

$$2m\sqrt{2gh} = \frac{4}{3} F_0 \epsilon.$$

De esta relación se deduce que la fuerza máxima entre la bolita y la superficie de la cual rebota depende del tiempo durante el cual los dos cuerpos se mantienen en contacto. Tanto menor es este intervalo de tiempo, tanto mayor resulta ser  $F_0$ . Veamos un ejemplo numérico. Supongamos que una bolita de 50 g se hace caer desde una altura de 1 m. Supongamos además que el intervalo de tiempo durante el cual los dos cuerpos se mantienen en contacto es aproximadamente 5 ms, o sea,  $2\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$  s. Con  $g = 10 \text{ m/s}^2$  se tiene:

$$F_0 = \frac{3}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} 0,05 \cdot \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1} \text{ [N]} \simeq 67 \text{ [N]},$$

fuerza que es más de cien veces mayor que el peso de la bolita. Si la bolita en lugar de acero es de goma, el tiempo de colisión aumenta considerablemente (en un orden de magnitud y

más), siendo la fuerza  $F_0$ , por lo tanto, menor en ese mismo factor. Esto explica por que es posible que si se lanza una bolita de acero y una bolita de goma de iguales masas y con la misma velocidad contra un vidrio, la bolita de acero rompe el vidrio mientras que la de goma rebota.

## 6.4. Problemas

1. Un muchacho de  $m_1 = 40$  kg se encuentra sobre una plataforma móvil de  $m_2 = 10$  kg junto a dos ladrillos de  $m = 5$  kg. La plataforma puede desplazarse, sin roce, sobre un terreno horizontal. En cierto instante el muchacho lanza horizontalmente uno y después el otro ladrillo hacia atrás de la plataforma, con una velocidad  $v_0 = 2$  m/s respecto a él mismo. ¿Qué velocidad  $v$  adquirirá la plataforma?

Respuesta: 
$$v = v_0 \frac{m(2M + 3m)}{(M + m)(M + 2m)} = 0,348 \text{ m/s},$$

con  $M \equiv m_1 + m_2$ .

2. Se lanza un proyectil con una velocidad inicial de 20 m/s formando un ángulo de  $30^\circ$  respecto a la horizontal. En el transcurso de su vuelo, el proyectil explota rompiéndose en dos partes, una de las cuales tiene el doble de masa que la otra. Los dos fragmentos aterrizan simultáneamente. El fragmento más ligero aterriza a 20 m del punto de lanzamiento y en la dirección y sentido en que se disparó el proyectil. ¿Dónde aterrizará el otro fragmento?

3. Una partícula de masa  $m$  y velocidad  $v_0$  choca contra otra idéntica en reposo. La partícula en reposo tiene un resorte de constante de restitución  $k$ , al cual queda adosada la partícula incidente (ver figura adjunta). Describa el movimiento del sistema después de la colisión lo más detalladamente posible.

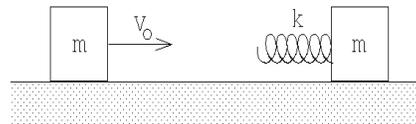


Figura 6.3

4. Un bloque de madera de 1 kg se sujeta a un resorte de constante de restitución  $k = 200\text{N/m}$ . El conjunto descansa sobre una superficie lisa, como se ve en la figura. Se dispara contra el bloque un proyectil de 20 g y el resorte se comprime 13.3 cm.

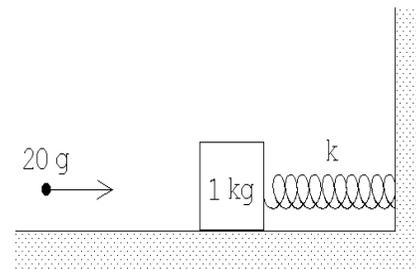


Figura 6.4

- a) Encuentre la velocidad del proyectil antes del choque.
- b) ¿Qué fracción de la energía mecánica inicial se pierde en el choque?

5. Una granada, que se encuentra en reposo, explota partiéndose en dos fragmentos. Sean  $m_1$  y  $m_2$  las masas de los dos fragmentos. Demuestre que las energías cinéticas de los fragmentos vienen dadas por

$$T_1 = \frac{m_2 Q}{m_1 + m_2}$$

y

$$T_2 = \frac{m_1 Q}{m_1 + m_2},$$

donde  $Q$  es la diferencia entre la energía cinética total del sistema después y antes de la explosión. ( $Q$  es la energía liberada por la explosión de la granada.)

6. Un núcleo de  $^{236}\text{U}$  (masa=236 amu), inicialmente en reposo, se divide en dos fragmentos de masas 146 y 90 amu. El valor  $Q$  de la reacción es de 190 MeV. Encuentre la velocidad y energía (en MeV) de cada uno de los fragmentos. (1 amu=1.7  $\cdot 10^{-27}$  Kg, 1 MeV=1.6 $\cdot 10^{-13}$  J.)
7. Un ascensor sube en un pozo a razón de 2 m/s. En el instante en que el ascensor está 18 m del extremo superior del pozo, se deja caer una pelota desde la parte superior del pozo. La pelota rebota elásticamente sobre el techo del ascensor. ¿Hasta qué altura subirá la pelota en relación a la parte superior del pozo? Resuelva el mismo problema suponiendo que el elevador se mueve hacia abajo a 2 m/s.
8. Una partícula  $A$  que inicialmente tiene una velocidad  $v_0$  choca contra otra que se encuentra en reposo, desviándose (la partícula incidente) en un ángulo  $\phi$ . La velocidad de  $A$  después del choque es  $v$ . Por otra parte, la segunda partícula se desvía en un ángulo  $\theta$  respecto a la dirección inicial de la primera partícula. Demuestre que

$$\tan \theta = \frac{v \sin \phi}{v_0 - v \cos \phi}.$$

9. Considere una plataforma de ferrocarril de peso  $W$  que puede rodar sin fricción sobre una vía recta y horizontal (ver figura adjunta). Inicialmente la plataforma se mueve a la derecha con velocidad  $v_0$ . Sobre la plataforma se encuentra de pie un hombre de peso  $W$ .



Figura 6.5

¿Cuál es el cambio de velocidad de la plataforma si el hombre corre a la izquierda, de modo que su velocidad con relación a la plataforma es  $u$  cuando está a punto de saltar del extremo izquierdo?

10. Un objeto de masa  $m = 5$  kg, resbala por una rampa de masa  $M = 10$  kg, partiendo desde una altura  $h = 2$  m. La rampa puede deslizarse, sin roce, sobre el suelo. Una vez que la masa llega abajo, ¿con qué velocidad se mueve la rampa?

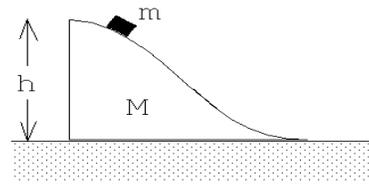


Figura 6.6

11. Un satélite, que se mueve en línea recta con una rapidez  $v$  respecto a algún sistema de referencia, recoge partículas (polvo) cósmicas (que, supondremos, se encuentran en reposo en el sistema de referencia en cuestión) a una tasa  $dM/dt = kv$ , donde  $k$  es una constante. Si en el instante  $t = 0$  la velocidad del satélite es  $v_0$  y su masa es  $M_0$ , encuentre  $v(t)$ .
12. Sobre una superficie horizontal sin fricción se encuentran en reposo  $N$  bloques de igual masa  $m$  colocados uno al lado del otro en línea recta separados por una pequeña distancia. (Los bloques están enumerados de izquierda a derecha como  $N, N - 1, N - 2, \dots, 2, 1$ .) Desde la izquierda incide sobre ellos un bloque de masa  $M > m$ , con velocidad  $v_0$ . Suponga que todos los choques son perfectamente elásticos.

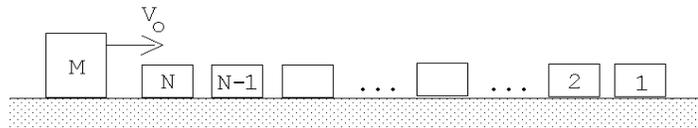


Figura 6.7

- a) Calcule la velocidad final de cada bloque después que han ocurrido todos los choques.
- b) Muestre explícitamente (realizando los cálculos antes y después de todos los choques) que se conserva el momento lineal y la energía cinética del sistema.
13. Aldo y su hermano Pablo han ido a patinar a una laguna helada. Al mediodía Aldo se detiene para abrir el paquete del almuerzo, cuando observa que Pablo se aproxima directamente hacia él con una rapidez  $v$ . Antes del impacto Aldo le lanza a su hermano el paquete en dirección horizontal, el cual es atrapado en el aire por Pablo. Si ambos hermanos tienen la misma masa  $M$ , y la masa del paquete es  $m$ , calcule el valor mínimo de la rapidez con la cual Aldo debe lanzar el paquete para que su hermano no choque con él.

14. Considere un péndulo consistente de una masa  $m$  colgada de un hilo de largo  $L$ . Suponga que el péndulo inicialmente parte con el hilo en posición horizontal. Al llegar la masa al punto inferior (punto O de la figura 6.8), choca elásticamente con una masa  $M = 2m$  que se mueve con velocidad  $-v_0\hat{x}$ . El péndulo rebota (hacia atrás) llegando tener como amplitud máxima nuevamente la horizontal.

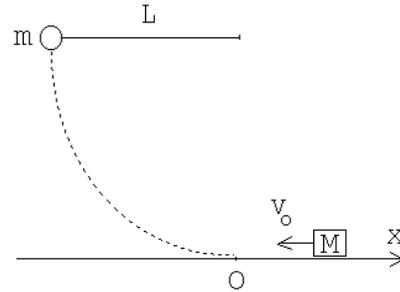


Figura 6.8

- a) Encuentre la rapidez inicial  $v_0$  en función de  $m$ ,  $M$ ,  $L$  y  $g$ .
- b) ¿Cuál es la velocidad de  $M$  después del choque?

15. Considere la configuración mostrada en la figura adjunta. Suponga que en el instante  $t = 0$  todas las masas están en reposo. La masa #1, después de avanzar una distancia  $h/2$ , colisiona inelásticamente con la masa  $m$  quedando adosada a ella. ¿Cuál es la velocidad de la masa #1 justo antes de la colisión? ¿Cuál es la velocidad de la masa #2 justo después de la colisión? ¿Con qué velocidad llega la masa #2 al suelo?

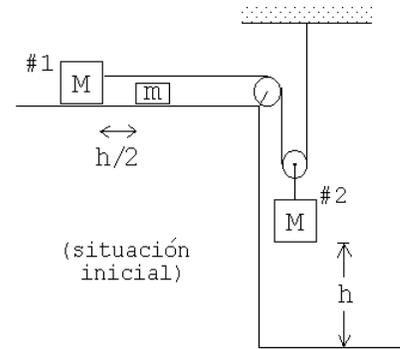


Figura 6.9

16. Un proyectil de masa  $m = 20$  g, que se desplaza con velocidad  $v$ , choca contra un bloque de masa  $M = 0,48$  kg que se encuentra en reposo sobre una superficie lisa. El proyectil queda incrustado en el bloque.

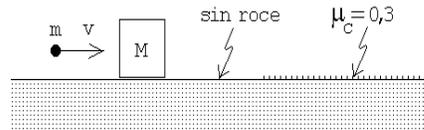


Figura 6.10

A continuación, el sistema proyectil bloque resbala sobre una zona donde el coeficiente de roce cinético con el bloque es  $\mu_c = 0,3$ . El sistema se detiene después de haber resbalado 10 m sobre esa zona rugosa. Encuentre la velocidad inicial del proyectil.

17. Sobre una plataforma horizontal lisa (sin roce) se colocan en línea recta 99 bloques de igual volumen y masas  $2m, 3m, 4m, \dots, 99m$  y  $100m$ , separadas entre sí por una distancia  $a$  (ver figura 6.11). Desde la izquierda incide una partícula de masa  $m$  con velocidad  $v_0$ . Todos los choques son perfectamente elásticos.

- a) Calcule la velocidad de la partícula de masa  $2m$  inmediatamente después de la primera colisión.

- b) Calcule la velocidad de la partícula de masa  $2m$  inmediatamente después que experimenta el segundo choque.
- c) Después de un tiempo suficientemente largo se observa que ningún bloque permanece sobre la plataforma. ¿Cuántos bloques cayeron al lado izquierdo y cuántos al lado derecho?

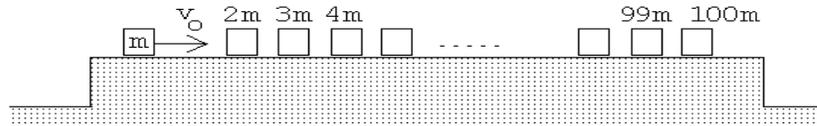


Figura 6.11

18. Sobre un plano liso se encuentran tres discos iguales (de radio  $R$  y masa  $M$ ). Al disco  $A$ , que incide con velocidad  $v_0$  choca simultánea y elásticamente con los discos  $B$  y  $C$ , tal como se muestra en la figura 6.12. Los discos  $B$  y  $C$  inicialmente se encuentran en reposo con los centros separados en una distancia  $2R+2a$ . Suponga que no hay roce entre los bordes de los discos cuando están en contacto. Encuentre la velocidad del disco  $A$  después de la colisión.

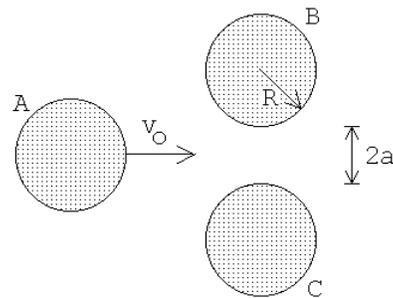


Figura 6.12

Respuesta: 
$$v_f = v_0 \frac{\eta^2 - 2}{6 - \eta^2}, \quad \text{con } \eta = \frac{R + a}{R}.$$

19. Un objeto de masa  $m$  resbala sobre la superficie lisa de una “cuña”  $M$ . La cuña reposa sobre una superficie también lisa (ver figura). Originalmente el objeto se encuentra en reposo a una altura  $h$  medida desde el tramo horizontal.

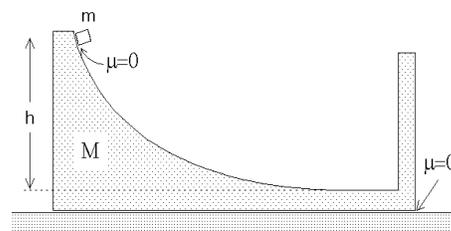


Figura 6.13

- a) Calcule las velocidades de la cuña y de la masa  $m$  una vez que  $m$  ha llegado al tramo horizontal de la cuña y se desplaza hacia la derecha.
- b) Posteriormente, la masa  $m$  choca elásticamente con la parte posterior de la cuña. Calcule la rapidez de  $m$  y  $M$  después del choque.

20. Una bola de goma se deja caer sobre una cúpula semiesférica de radio  $R$ . La bola se suelta a una altura  $H$  desde el suelo y a una distancia  $b$  con respecto a la vertical que pasa por el centro de la cúpula. La bola choca elásticamente con la cúpula. Calcule la altura  $h$  de rebote de la bola con respecto al suelo. Determine el valor máximo de  $b$  para que la respuesta tenga sentido.

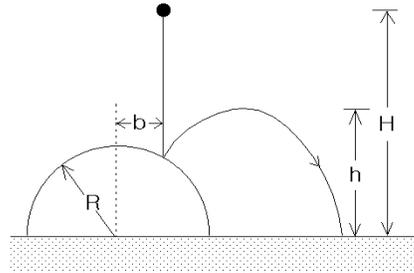


Figura 6.14

21. En la figura se muestran las direcciones incidente y de rebote de un cuerpo que choca contra una pared sin roce. El cuerpo incide con rapidez  $v_0$  y con una dirección que forma un ángulo  $\theta$  con la normal de la pared. El cuerpo emerge con rapidez  $\lambda v_0$  (con  $\lambda < 1$ ). Determine la dirección ( $\phi$  en la figura) con que emerge el cuerpo y el vector impulso que la pared imprime al cuerpo.

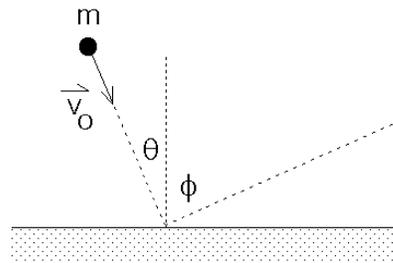


Figura 6.15

22. Una bala de masa 5 gramos atraviesa un saco de virutas de 1 kg de masa. El saco cuelga de un cordel de 2 m de largo. A consecuencia del impacto el saco entra en movimiento y se detiene cuando el cordel forma un ángulo de  $12^\circ$  con la vertical. Calcule la rapidez de la bala una vez que ha emergido del saco si su velocidad antes de la colisión es  $v_0 = 1000$  m/s.

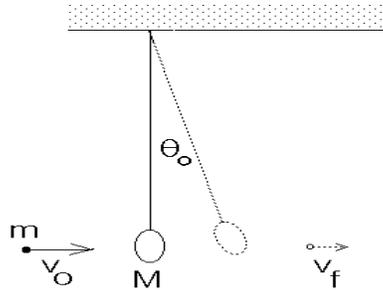


Figura 6.16

23.  $A$  y  $B$  son dos esferitas de igual masa  $m$  engarzadas en el eje horizontal.  $B$  está unida a un resorte ideal de largo natural  $l_0$  y rigidez (constante de restitución)  $k$ . Inicialmente  $B$  está en reposo, el resorte en dirección vertical y sin deformación.  $A$  se desliza con velocidad  $v$  desconocida, choca con  $B$  y ambas permanecen unidas tras la colisión. Calcular  $v$ , si en el instante en que el conjunto se detiene el ángulo  $\theta$  tiene un valor de  $60^\circ$ . Suponga que el roce es despreciable.

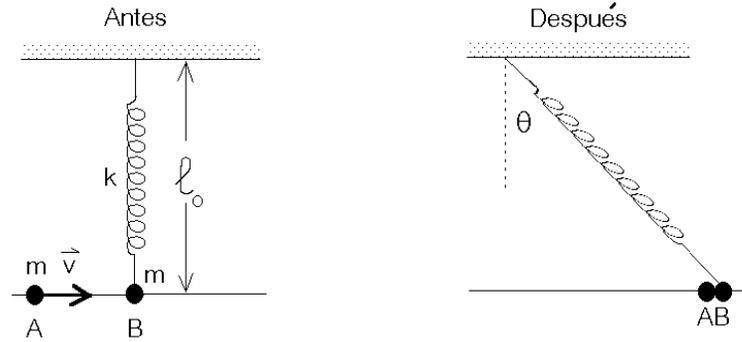


Figura 6.17

24. Dos carros  $B$  y  $C$ , de masas  $m$  y  $2m$  respectivamente, se encuentran inicialmente en reposo sobre una vía horizontal recta, separados por una distancia  $L$ . Un tercer carro  $A$ , de masa  $2m$ , que se desplaza con velocidad  $v_0$  hacia la derecha embiste al carro  $B$  desde la izquierda (ver figura). Suponga que todos los choques que ocurren son elásticos. En estas condiciones,

- Demuestre que el carro  $B$  choca dos veces con el carro  $A$ .
- Calcule el tiempo que media entre estos dos choques.

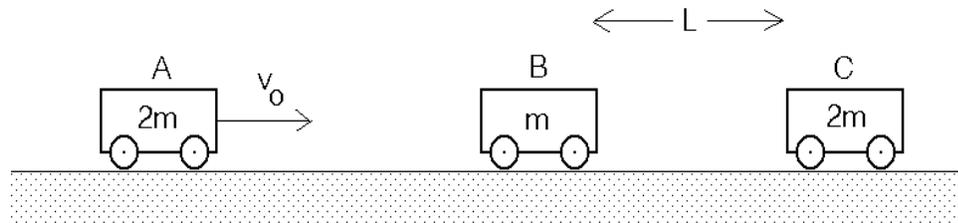


Figura 6.18

25. Una cuerda (flexible), de masa  $M$  y largo  $L$  se deja caer sobre una pesa. Inicialmente el extremo inferior de la cuerda justo toca la pesa y la cuerda se encuentra en reposo. Demuestre que la lectura de la pesa justo antes de que caiga sobre ella el último segmento de la cuerda, será  $W = 3Mg$ .

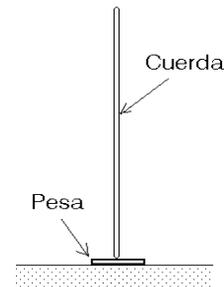


Figura 6.19

## 6.5. Solución a algunos de los problemas

### Solución al problema 6

Las energías cinéticas totales antes y después del proceso de fisión son

$$K_i = 0$$

y

$$K_f = K_f^{(1)} + K_f^{(2)} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2.$$

La reacción es exotérmica, es decir, la energía final es superior a la energía inicial en  $Q = 190$  MeV. Se tiene entonces que

$$K_f - K_i = K_f = K_f^{(1)} + K_f^{(2)} = Q.$$

La conservación del momento lineal nos da la relación

$$m_1v_1 = m_2v_2.$$

Usando esta relación se deduce que

$$\frac{K_f^{(1)}}{K_f^{(2)}} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

De las relaciones

$$K_f^{(1)} + K_f^{(2)} = Q$$

y

$$\frac{K_f^{(1)}}{K_f^{(2)}} = \frac{m_2}{m_1}$$

se deduce que

$$K_f^{(1)} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}Q = 117,5 \text{ MeV}$$

y

$$K_f^{(2)} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}Q = 72,5 \text{ MeV}.$$

De la relación

$$K_f^{(1)} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}Q$$

se deduce que

$$v_1^2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{2Q}{m_1 + m_2} = \frac{146}{90} \frac{2 \cdot 190 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}}{236 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}} \simeq 2,46 \cdot 10^{14} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2,$$

o sea,

$$v_1 = 1,57 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Para la velocidad del fragmento mas pesado se obtiene

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 = 0,97 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

### Solución al problema 11

Sea  $v(t)$  la velocidad y  $M(t)$  la masa del cohete (incluyendo la del polvo recolectado). La conservación del momento lineal nos da la relación

$$M(t)v(t) = M(t + dt)v(t + dt) .$$

Para un intervalo de tiempo  $dt$  infinitesimal se tiene que

$$M(t + dt) = M(t) + \frac{dM}{dt} dt$$

y

$$v(t + dt) = v(t) + \frac{dv}{dt} dt .$$

Usando estas relaciones se obtiene

$$\begin{aligned} M(t)v(t) &= M(t + dt)v(t + dt) \\ &= \left( M(t) + \frac{dM}{dt} dt \right) \cdot \left( v(t) + \frac{dv}{dt} dt \right) \\ &= M(t)v(t) + M(t) \frac{dv}{dt} dt + v(t) \frac{dM}{dt} dt + \frac{dM}{dt} \frac{dv}{dt} (dt)^2 \end{aligned}$$

Despreciando el término de orden  $(dt)^2$ , se obtiene

$$M(t) dv = -\frac{dM}{dt} v(t) dt .$$

Pero  $dM/dt = kv$ , luego

$$M(t) dv = -kv^2 dt .$$

Multiplicando esta relación por  $v = v(t)$  se obtiene

$$M(t)v(t) dv = -kv^3 dt .$$

Pero como el momento lineal se conserva, se tiene que  $M(t)v(t) = M_0v_0$ , donde  $M_0$  y  $v_0$  son la masa y velocidad del satélite en el instante  $t = 0$ . Usando esto, la última ecuación queda

$$\frac{dv}{v^3} = -\left( \frac{k}{M_0v_0} \right) dt .$$

Integrando la última ecuación desde el instante  $t = 0$  (en que la velocidad es  $v_0$ ) hasta el instante  $t$  (en que la velocidad es  $v(t)$ ) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v \frac{1}{v^3} dv &= - \left( \frac{k}{M_0 v_0} \right) \int_0^t dt \\ - \frac{1}{2v^2} \Big|_{v_0}^v &= - \left( \frac{k}{M_0 v_0} \right) t \Big|_0^t \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2} \right) &= \frac{k}{M_0 v_0} t \end{aligned}$$

Despejando  $v(t)$  se obtiene finalmente

$$v(t) = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{2kv_0 t}{M_0}}} .$$

#### Solución al problema 14

Para que el péndulo vuelva a su posición inicial, el choque elástico en la parte inferior debe ocurrir con momentum total nulo. Luego, después de la colisión la masa  $M$  tendrá una velocidad  $v_0 \hat{x}$ .

La velocidad  $v_1$  con que la masa  $m$  llega abajo, se obtiene de la relación (conservación de energía):

$$mgL = \frac{1}{2} m v_1^2 ,$$

de donde

$$v_1 = \sqrt{2gL} .$$

Para que la colisión ocurra con momento lineal cero la rapidez de la masa  $M$  debe satisfacer la relación

$$m v_1 = M v_0 ,$$

de donde se obtiene para  $v_0$  el resultado

$$v_0 = \frac{m}{M} v_1 = \frac{m}{M} \sqrt{2gL} .$$

#### Solución al problema 15

En todo instante la partícula #2 se mueva con la mitad de la velocidad de #1. Justo antes del choque la velocidad  $v_i$  de la masa #1 viene dada por (conservación de la energía):

$$Mg \frac{h}{4} = \frac{1}{2} (M) v_i^2 + \frac{1}{2} M \left( \frac{v_i}{2} \right)^2 = \frac{5}{8} M v_i^2 ,$$

o sea,

$$v_i^2 = \frac{2gh}{5} .$$

Mientras ocurre el choque (o sea, durante un brevísimo intervalo de tiempo  $[0, \epsilon]$ ) la cuerda ejerce una gran fuerza sobre la masa #1 y #2 transmitiendo un cambio de momento lineal  $\Delta p$ :

$$\Delta p = \int_0^\epsilon \tau(t) dt ,$$

donde  $\tau(t)$  es la tensión de la cuerda en función del tiempo. Este *impulso* aumenta el momento lineal de la masa #1 en la magnitud  $\Delta p$  y disminuye el momento lineal de la masa #2 en el doble de esa misma magnitud. Si  $v_f$  es la velocidad de la masa #1 justo después de la colisión, entonces la ecuación de conservación del momento lineal para la partícula #1 (junto con la masa  $m$ ) da la relación

$$Mv_i = (M + m)v_f + \Delta p .$$

Para la

$$M \frac{v_i}{2} = M \frac{v_f}{2} - 2\Delta p$$

Despejando  $v_2$  se obtiene

$$v_2 = v_1 \frac{5M}{5M + 4m} .$$

Para encontrar la velocidad  $\tilde{v}$  con que la masa #2 llega al suelo usamos nuevamente el principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}(M + m)v_f^2 + \frac{1}{2}M \left(\frac{v_f}{2}\right)^2 + Mg \frac{3h}{4} = \frac{1}{2}(M + m)(2\tilde{v})^2 + \frac{1}{2}M\tilde{v}^2 .$$

Despejando  $\tilde{v}$  y usando las expresiones para  $v_2$  y  $v_1$  se obtiene

$$\tilde{v}^2 = gh \frac{2M(5M + 3m)}{(5M + 4m)^2} .$$

Ejercicio: Verifique que tanto para  $m = 0$  como para  $m \rightarrow \infty$ , la última ecuación entrega el valor correcto para  $\tilde{v}$ .

### Solución al problema 19

El momento lineal inicial es cero, y como no hay fuerza externa actuando sobre el sistema, será nulo siempre. Cuando  $m$  llega abajo ( a la parte horizontal), sean  $v_m$  y  $v_M$  las velocidades de la masa  $m$  y de la cuña, respectivamente. La conservación del momento lineal y de la energía nos da las relaciones

$$mv_m + Mv_M = 0$$

y

$$mgh = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 .$$

Despejando  $v_m$  de estas dos ecuaciones (con las incógnitas  $v_m$  y  $v_M$ ) se obtiene

$$v_m = \pm \sqrt{2gh \frac{M}{M + m}} .$$

El signo + corresponde a la solución del problema antes de la colisión de  $m$  con la pared mientras que la con el signo - es la velocidad de  $m$  después del rebote. La velocidad de la cuña es

$$v_M = -\frac{m}{M}v_m = \mp \sqrt{2gh \frac{m}{M+m}}.$$

### Solución al problema 23

La colisión entre las dos esferitas es un proceso no elástico, por consiguiente, para el proceso de colisión sólo podemos usar la ley de conservación del momento lineal. Sea  $v_1$  la velocidad de las dos masas unidas justo después de la colisión. La conservación del momento lineal nos da la relación

$$mv = (2m)v_1,$$

o sea,  $v_1 = v/2$ . Luego las dos masas permanecen unidas, el resorte se estira y el sistema queda en reposo cuando el resorte forma un ángulo  $\theta$  con la normal (ver figura 6.17).

Una vez ocurrida la colisión, la energía se conserva. Aplicando la ley de conservación de energía al sistema que consiste de las dos esferitas y el resorte se obtiene

$$\frac{1}{2}(2m)v_1^2 = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2,$$

donde  $\Delta L$  es el alargamiento que sufre el resorte. Este viene dado por

$$\Delta L = \sqrt{\ell_0^2 + (\ell_0 \tan \theta)^2} - \ell_0 = \ell_0 \left[ \frac{1}{\cos \theta} - 1 \right].$$

Despejamos  $v_1$  de las dos últimas ecuaciones:

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \ell_0 \left( \frac{1}{\cos \theta} - 1 \right).$$

Con  $\cos \theta = \cos 60^\circ = 1/2$  se obtiene para  $v$

$$v = 2v_1 = \ell_0 \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

### Solución al problema 24

Usando las relaciones que se encontraron en la sección 6.2 para el choque elástico se deduce inmediatamente que, después de la primera colisión, el carro  $A$  (de masa  $2m$ ) tendrá la velocidad

$$v_A = \frac{2m - m}{2m + m}v_0 = \frac{v_0}{3}$$

mientras que la velocidad de  $B$  será

$$v_B = \frac{2(2m)}{2m + m}v_0 = \frac{4v_0}{3}.$$

El carro  $B$  tardará un tiempo

$$t_1 = \frac{L}{v_B} = \frac{3L}{4v_0}.$$

para colisionar con el carro  $C$ . Esta colisión también es elástica. Después de esta segunda colisión la velocidad de  $B$  será

$$\tilde{v}_B = \frac{m - 2m}{m + 2m}v_B = -\frac{v_B}{3} = -\frac{4v_0}{9}.$$

El signo negativo indica que  $B$  ahora se mueve hacia la izquierda, y por consiguiente, necesariamente debe colisionar denuevo con el carro  $A$  (que siguió moviéndose hacia la derecha con velocidad  $v_A$ ).

Cuando  $B$  colisiona con  $C$ , la separación entre  $A$  y  $B$  es  $L' = L - v_A t_1 = L - L/4 = 3L/4$ . De ahí en adelante  $B$  se mueve hacia la izquierda con velocidad  $\tilde{v}_B = -4v_0/9$ , mientras que  $A$  sigue moviéndose hacia la derecha con velocidad  $v_A = v_0/3$ . La rapidez relativa con que se acercan es  $v_r = v_0(4/9 + 1/3) = 7v_0/9$ . La distancia  $L'$  será cubierta en un tiempo

$$t_2 = \frac{L'}{v_r} = \frac{3L}{4} \cdot \frac{9}{7v_0} = \frac{27L}{28v_0}.$$

El tiempo total que transcurre entre las dos colisiones de  $A$  con  $B$  es  $t_1 + t_2$ , es decir,

$$t_{\text{tot}} = t_1 + t_2 = \frac{12L}{7v_0}.$$

## 6.6. Colisión de dos discos

Un disco de radio  $R$  y masa  $m$ , que incide con velocidad  $v_0$ , colisiona elásticamente con un disco de masa  $M$  y radio  $R$ , que inicialmente se encuentra en reposo. La colisión ocurre con un parámetro de impacto  $b$  (ver figura 6.20). Encuentre el ángulo de dispersión  $\theta$  del disco incidente. Suponga que no hay fricción entre los discos y la superficie sobre la que se deslizan, y que tampoco hay roce entre los bordes de los discos mientras estos colisionan. En el lado izquierdo de la figura 6.20 se muestra la situación (vista por un observador para el cual inicialmente la partícula  $M$  está en reposo) antes de la colisión y al lado derecho la situación que se tiene después de la colisión.

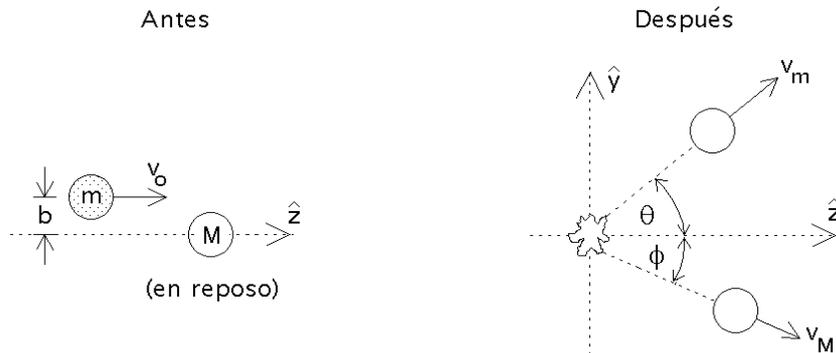


Figura 6.20

**Solución analítica:**

Al no haber roce entre los bordes de los dos discos mientras colisionan, la fuerza de interacción entre los discos necesariamente será perpendicular al perímetro, o sea, en la dirección radial. Sea  $\hat{z}$  la dirección definida por la velocidad del disco incidente. De la figura 6.21 se desprende que el disco  $M$ , que inicialmente está en reposo, después de la colisión se moverá formando un ángulo  $\phi$  con respecto a  $\hat{z}$ , donde  $\phi$  viene dado por

$$\sin \phi = \frac{b}{2R} . \quad (6.5)$$

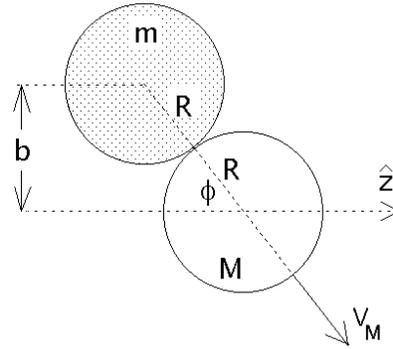


Figura 6.21

Sean  $v_m$  y  $v_M$  las rapidezes de los dos discos después de la colisión. La conservación del momento lineal tanto en la dirección  $\hat{y}$  como en la dirección  $\hat{z}$  nos da las ecuaciones

$$M v_M \sin \phi = m v_m \sin \theta \quad (6.6)$$

y

$$m v_0 = M v_M \cos \phi + m v_m \cos \theta . \quad (6.7)$$

El principio de la conservación de la energía (recordemos que el choque es elástico) nos entrega la relación

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 . \quad (6.8)$$

En las ecuaciones (6.6), (6.7) y (6.8), las incógnitas son  $v_m$ ,  $v_M$  y  $\theta$ .

Despejemos  $v_M$  de la ecuación (6.6) y sustituyámosla en las ecuaciones (6.7) y (6.8). De esta manera se obtienen las relaciones

$$m v_0 = m v_m \cos \theta + \left( m v_m \frac{\sin \theta}{\sin \phi} \right) \cos \phi , \quad (6.9)$$

y

$$M m v_0^2 = M m v_m^2 + \left( m v_m \frac{\sin \theta}{\sin \phi} \right)^2 , \quad (6.10)$$

respectivamente. Reordenando las dos últimas ecuaciones, éstas pueden escribirse de la forma

$$v_0 = v_m \left( \cos \theta + \sin \theta \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \right) , \quad (6.11)$$

y

$$v_0^2 = v_m^2 \left( 1 + \frac{m}{M} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \phi} \right) . \quad (6.12)$$

Elevando al cuadrado la penúltima ecuación y luego dividiéndola por la ecuación (6.12), se obtiene

$$\left( \cos \theta + \sin \theta \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \right)^2 = 1 + \frac{m}{M} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \phi} . \quad (6.13)$$

A partir de esta ecuación, usando relaciones trigonométricas elementales se obtiene

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\cos \phi}{\sin \phi} + \sin^2 \theta \frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \phi} &= 1 + \frac{m}{M} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \phi} \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \frac{m}{M} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \phi} , \end{aligned}$$

$$2 \cos \theta \sin \theta \frac{\cos \phi}{\sin \phi} + \sin^2 \theta \frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \phi} = \sin^2 \theta + \frac{m}{M} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \phi} .$$

Multiplicando por  $\sin^2 \phi$  y dividiendo por  $\sin^2 \theta$  queda

$$2 \cos \phi \sin \phi \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \cos^2 \phi = \sin^2 \phi + \frac{m}{M} ,$$

$$\frac{\sin(2\phi)}{\tan \theta} = -\cos(2\phi) + \frac{m}{M} ,$$

de donde finalmente

$$\tan \theta = \frac{\sin(2\phi)}{\frac{m}{M} - \cos(2\phi)} . \quad (6.14)$$

La última ecuación da el ángulo de dispersión de la partícula incidente en función de  $\phi$ , ángulo que a su vez está determinado si se conoce el parámetro de impacto  $b$  (ver ecuación (6.5)).

Analicemos brevemente dos casos límites:

i) Límite  $M \rightarrow \infty$ .

Cuando la masa del “blanco” es extremadamente grande comparada con la masa del disco incidente, entonces el disco  $M$  no se moverá y la colisión será *especular*. Cuando la dispersión es especular, el ángulo de rebote del disco  $m$  respecto a la normal es igual al ángulo incidente. De la figura 6.21 se observa de inmediato que en ese caso la relación entre el ángulo de dispersión y el ángulo  $\phi$  es

$$\theta = \pi - 2\phi . \quad (6.15)$$

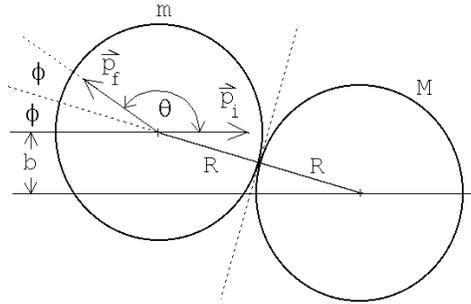


Figura 6.22

Demostremos que se obtiene el mismo resultado a partir de la ecuación (6.14). Para  $M \rightarrow \infty$  ésta queda

$$\tan \theta = -\tan(2\phi) . \quad (6.16)$$

Pero

$$-\tan(2\phi) = \tan(\pi - 2\phi) ,$$

luego

$$\tan \theta = \tan(\pi - 2\phi) . \quad (6.17)$$

De la última ecuación se desprende inmediatamente el resultado (6.15).

ii) Límite  $M = m$ .

Cuando  $M = m$  entonces la ecuación (6.14) queda

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin(2\phi)}{1 - \cos(2\phi)} \\ &= \frac{2 \sin \phi \cos \phi}{1 - \cos^2 \phi + \sin^2 \phi} \\ &= \cot \phi \end{aligned} \quad (6.18)$$

De esta última relación se desprende que

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{2} . \quad (6.19)$$

Este es un resultado general: siempre que colisiona un objeto elásticamente con otro de igual masa que inicialmente está en reposo, la suma de los ángulos de dispersión de ambos objetos será de  $90^\circ$ .

### Solución gráfica

Demostremos ahora el resultado dado por la ecuación (6.14) usando un método gráfico.

La figura 6.23 muestra los discos antes y después de la colisión vistos desde dos sistemas de referencia distintos: el sistema del laboratorio (en que  $M$  inicialmente está en reposo) y el sistema de coordenadas fijo al *centro de masas*. A pesar de que el concepto de *centro de masas* se estudiará recién en el siguiente capítulo, para resolver el presente problema basta con saber que el sistema de referencia del centro de masas corresponde al referencial de un observador que se mueve con velocidad uniforme respecto al laboratorio y para el cual el momento lineal total antes de la colisión es nulo. Tal sistema de referencia es igual al del laboratorio, un sistema de referencia inercial, es decir, en él también se cumplen las leyes de Newton.

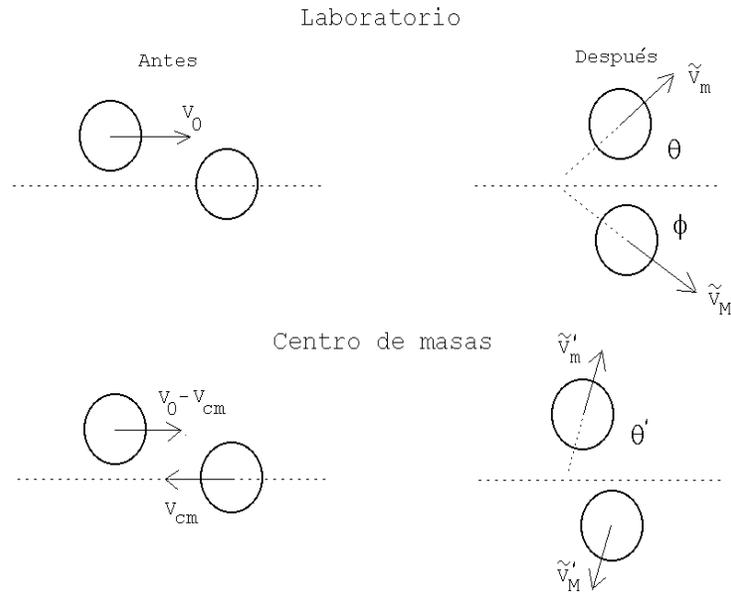


Figura 6.23

Notación: Para hacer más transparente lo que sigue, a las magnitudes físicas, cuando éstas estén medidas (observadas) desde el sistema de referencia del centro de masas, le agregaremos una prima. A las magnitudes después de la colisión les agregaremos adicionalmente una tilde.

El momento lineal se conserva para ambos observadores. En particular, para el observador en el sistema de referencia del centro de masas, el momento total de las partículas siempre es nulo (en efecto, ésta será, como veremos en el siguiente capítulo, la definición del *sistema de referencia del centro de masas*).

Resolvamos primero el problema para el observador del centro de masas. Tal como se mencionó en el párrafo anterior, los momentos lineales de los discos, en todo instante, en particular antes y después de la colisión, deben ser de igual magnitud pero apuntar en sentidos contrarios. Si la colisión es elástica entonces, además, las magnitudes del momento lineal, antes y después de la colisión, deben ser iguales. O sea, medidos desde el CM, los momentos lineales de los dos discos, antes y después de la colisión, tienen todos la misma magnitud. Si los cuatro vectores tienen la misma magnitud, las puntas de estos vectores deben estar ubicados todos sobre un círculo (ver figura 6.24).

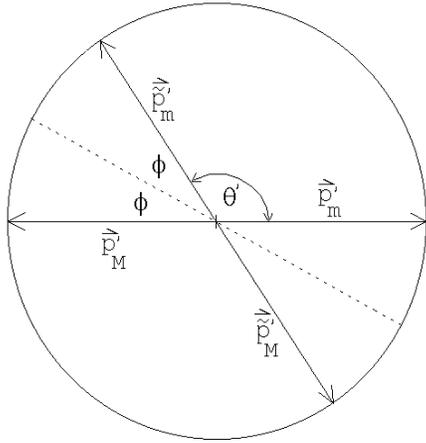


Figura 6.24

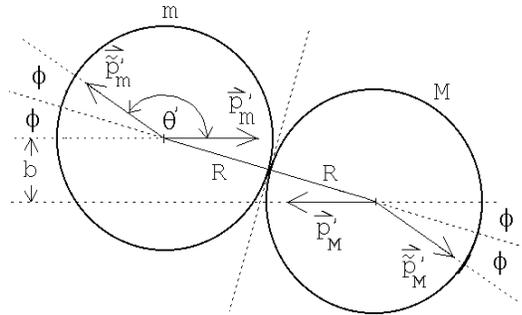


Figura 6.25

En el sistema de referencia del centro de masas es fácil determinar los ángulos de dispersión de los dos discos. Cuando no hay roce, la fuerza, y por consiguiente, el cambio de momento lineal de cada disco, debe ser perpendicular a la superficie de contacto. De la afirmación anterior es fácil deducir que la colisión (vista desde el CM) será especular (ver figura 6.25). De las figuras 6.24 y 6.25 se deduce que el ángulo de dispersión de  $m$  viene dado por

$$\theta' = \pi - 2\phi \quad , \quad (6.20)$$

donde  $\sin \phi = b/(2R)$ .

Volvamos al sistema de referencia del laboratorio. Para pasar del sistema de referencia del centro de masas al del laboratorio, debemos sumar a todas las velocidades la velocidad del movimiento relativo entre los dos observadores (esto es, la velocidad del centro de masas). Para realizar esto gráficamente debemos primero transformar la figura 6.24, que es un gráfico de momentos lineales, a una de velocidades. Pero, para transformar momentos lineales en velocidades basta con dividir a los vectores momento lineal correspondientes a cada partícula por su masa. Si los dos discos no tienen la misma masa, entonces los vectores de velocidad de las partículas ya no quedarán sobre el mismo círculo. Supongamos que  $M$  es mayor que  $m$ , entonces los vectores velocidad correspondientes a la masa  $M$  serán menores que los del disco  $m$  y, en este caso, se obtiene una representación gráfica como la mostrada en la figura 6.26).

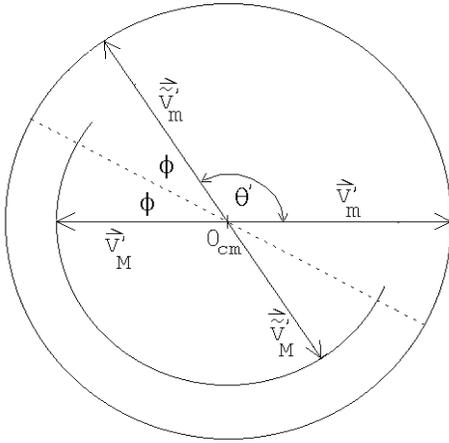


Figura 6.26

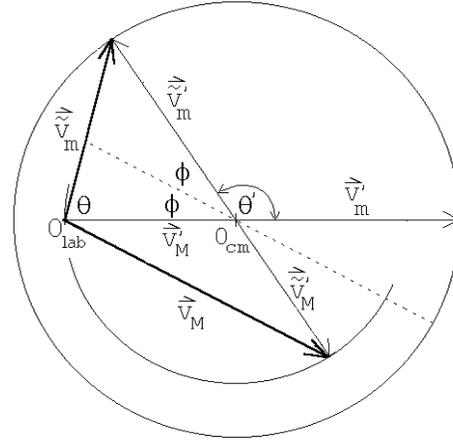


Figura 6.27

Elijamos como unidad de magnitud para medir las rapidezces a la rapidez que la partícula  $m$  tiene en el sistema de referencia del centro de masas, o sea, la rapidez (medida desde el sistema de referencia del centro de masas) de la partícula  $m$ , tanto antes como después de la colisión, es 1. La rapidez de la partícula  $M$ , en esas unidades, es  $m/M$ .

Como ya hemos mencionado, para pasar del sistema de referencia del centro de masas al sistema del laboratorio, debemos sumarle a todos los vectores velocidad del diagrama 6.26, la velocidad relativa de los dos observadores (que es  $-\vec{v}'_M$ ).

En lugar de sumar un vector constante a todos los vectores de un gráfico resulta más cómodo simplemente mover el origen en la dirección contraria en esa misma magnitud. Trasladando el origen en la cantidad  $\vec{v}'_M$  se obtiene la figura 6.27. Cuando los vectores velocidad se observan desde el sistema de centro de masas debe usarse el origen  $O_{cm}$ , mientras que si esto se realiza desde el sistema de referencia del laboratorio, hay que usar el origen  $O_{lab}$ .

A partir de la figura 6.27 es fácil determinar el ángulo de dispersión  $\theta$ . La figura 6.28 muestra el detalle del triángulo relevante. Se tiene:

$$a = \tilde{v}'_m \sin(2\phi) = \sin(2\phi)$$

$$b = v'_M - \tilde{v}'_m \cos(2\phi) = \frac{m}{M} - \cos(2\phi)$$

y

$$\tan \theta = \frac{a}{b} = \frac{\sin(2\phi)}{\frac{m}{M} - \cos(2\phi)}.$$

