

Capítulo 2

CINEMÁTICA DEL SÓLIDO INDEFORMABLE

2.1. Introducción

Aplicaremos lo expuesto en el capítulo anterior para estudiar la dinámica del sólido indeformable. Previamente revisaremos los conceptos de cinemática del sólido indispensables para una comprensión del movimiento de un sólido rígido sometido a fuerzas y torques.

2.2. Las ecuaciones generales del movimiento

Sea $OXYZ$ un sistema de referencia fijo (sistema SF), y sea $Axyz(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ un sistema de referencia móvil (sistema SM). En la Fig. 2.1 se observan ambos sistemas y los vectores que definen la posición de una partícula móvil P respecto del SF y del SM . Llamaremos *absolutas* las cantidades medidas por el SF y llamaremos *relativas* aquellas medidas por el SM . Si x, y, z son las coordenadas de P para el observador SM , el vector posición *relativa* de P (i.e. respecto del SM) será

$$\overrightarrow{AP} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k},$$

y la velocidad y aceleración relativas de P serán

$$\vec{v}_{Pr} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k}$$

$$\vec{a}_{Pr} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} + \ddot{z} \hat{k}$$

respectivamente.

Además, llamaremos \vec{v}_A y \vec{a}_A a la velocidad y aceleración *absolutas*—o sea, observadas por el *SF*—del origen A del *SM*. Análogamente, \vec{v}_P y \vec{a}_P serán la velocidad y aceleración *absolutas*—o sea, medidas por el *SF*—del móvil P . Por último, designaremos por $\vec{\omega}_{SM}$ a la velocidad angular absoluta del *SM*, y por $\dot{\vec{\omega}}_{SM}$ a la aceleración angular absoluta del *SM*. Con estas definiciones, las ecuaciones del movimiento relativo encontradas anteriormente son

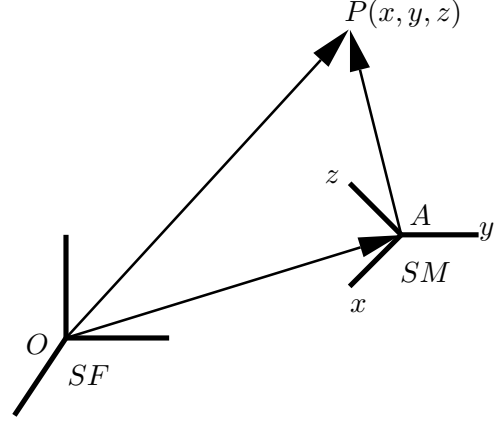


Figura 2.1: Sistemas de referencia

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}_A + \vec{v}_{Pr} + \vec{\omega}_{SM} \times \overrightarrow{AP} \\ \vec{a}_P &= \vec{a}_A + \vec{a}_{Pr} + \dot{\vec{\omega}}_{SM} \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega}_{SM} \times (\vec{\omega}_{SM} \times \overrightarrow{AP}) + 2 \vec{\omega}_{SM} \times \vec{v}_{Pr}\end{aligned}$$

Supongamos, ahora, que los puntos A y P pertenecen a un sólido indeformable y que el *SM* está ligado rígidamente al sólido de modo que el movimiento del *SM* es el del sólido en todo instante. Esto significa que el punto P está en reposo relativo al *SM*; luego, el vector \overrightarrow{AP} es invariable en magnitud, dirección y sentido respecto del observador móvil, por lo que

$$\vec{v}_{Pr} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{a}_{Pr} = 0.$$

Como el movimiento del *SM* es igual al movimiento del sólido, escribiremos

$$\vec{\omega}_{SM} = \vec{\omega}_S = \text{velocidad angular absoluta del sólido}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_{SM} = \dot{\vec{\omega}}_S = \text{aceleración angular absoluta del sólido,}$$

con lo que \vec{v}_P y \vec{a}_P se reducen a

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}_S \times \overrightarrow{AP} \quad (2.1)$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}_S \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega}_S \times (\vec{\omega}_S \times \overrightarrow{AP}) \quad (2.2)$$

Estas ecuaciones muestran que *el movimiento más general de un sólido equivale a una traslación de un punto cualquiera A de él—que se suele llamar punto base—más una rotación en torno de dicho punto*. El punto base que se use para determinar el campo de velocidades puede ser diferente del que se utilice para determinar el campo de aceleraciones.

2.3. Propiedades del campo de velocidades

Si proyectamos la Ec. 2.1 en la dirección de \overrightarrow{AP} se obtiene

$$\vec{v}_P \cdot \widehat{AP} = \vec{v}_A \cdot \widehat{AP},$$

puesto que $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$ siempre. La ecuación anterior revela que *las velocidades de todos los puntos de un eje cualquiera del sólido dan la misma proyección sobre el eje*. Esto se conoce como la *propiedad de equiproyectividad del campo de velocidades*.

Si proyectamos la Ec. 2.1 en la dirección de la velocidad angular se obtiene

$$\vec{v}_P \cdot \widehat{\omega}_S = \vec{v}_A \cdot \widehat{\omega}_S$$

que muestra que *las velocidades de todos los puntos del sólido dan la misma proyección en la dirección del vector $\vec{\omega}_S$* .

Si AB es un eje del sólido paralelo a $\vec{\omega}_S$, entonces

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_S \times \overrightarrow{AB} = \vec{v}_A$$

puesto que $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ siempre. Luego, *las velocidades de todos los puntos de un eje del sólido paralelo a $\vec{\omega}_S$ son iguales*. De acuerdo con las dos últimas propiedades, debe existir un eje paralelo a $\vec{\omega}_S$, cuyos puntos tengan velocidades iguales y que sean paralelas a $\vec{\omega}_S$. Este eje recibe el nombre de *eje central* o *eje de Mozzi* del campo de velocidades. Para encontrar la ecuación del eje de Mozzi multiplicamos vectorialmente por la izquierda la Ec. 2.1 por $\vec{\omega}_S$. Si suponemos que P es un punto cualquiera del eje central se debe cumplir que:

$$\vec{\omega}_S \times \vec{v}_P = 0 = \vec{\omega}_S \times \vec{v}_A + \vec{\omega}_S \times (\vec{\omega}_S \times \overrightarrow{AP}).$$

Como $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{c} \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} \vec{c}$, podemos despejar \overrightarrow{AP}

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{\omega}_S \times \vec{v}_A}{\omega_S^2} + \frac{\vec{\omega}_S \cdot \overrightarrow{AP}}{\omega_S^2} \vec{\omega}_S. \quad (2.3)$$

Esta ecuación define la posición de un punto cualquiera P del eje central respecto del punto base A , cuya posición y velocidad suponemos conocidas. Por lo tanto, representa la ecuación del eje central.

Corresponde a una recta paralela al vector $\vec{\omega}_S$, cuyos puntos P tienen velocidades iguales que son paralelas a $\vec{\omega}_S$. La relación geométrica de los términos de la Ec. 2.3 se muestran en la Fig. 2.2. El plano π pasa por el punto base A y es perpendicular al eje de rotación. El eje central interseca en el punto B al plano π . El vector \overrightarrow{AB} está contenido en el plano π ya que es perpendicular al vector $\vec{\omega}_S$; está definido por

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{\omega}_S \times \vec{v}_A}{\omega_S^2}.$$

El vector \overrightarrow{BP} coincide con el eje central y está definido por

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= \frac{\vec{\omega}_S \cdot \overrightarrow{AP}}{\omega_S^2} \vec{\omega}_S, \\ &= \hat{\omega}_S \cdot \overrightarrow{AP} \hat{\omega}_S. \end{aligned}$$

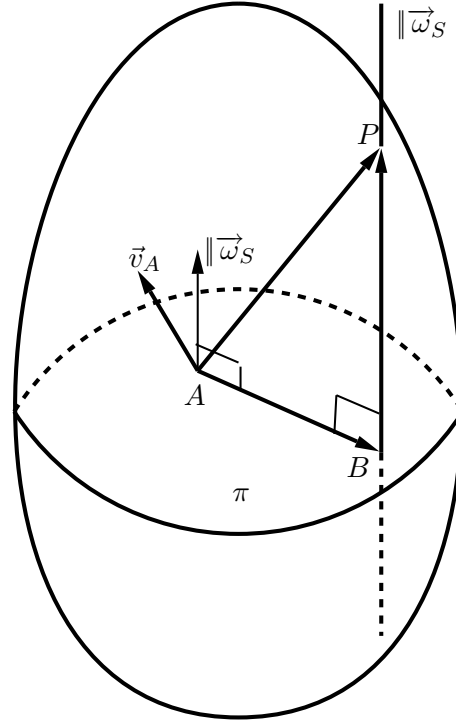


Figura 2.2: Eje central

lo que representa la proyección de \overrightarrow{AP} sobre el eje central. La Ec. 2.3 del eje central corresponde a la condición de paralelismo entre los vectores \vec{v}_P y $\vec{\omega}_S$, o sea, $\vec{\omega}_S \times \vec{v}_P = 0$.

Sin embargo, este producto vectorial también se anula si $\vec{v}_P = 0$. En este último caso, todos los puntos P del eje central están en reposo instantáneo y pasa a llamarse *Eje Instantáneo de Rotación* (\equiv EIR) cuya ecuación es la Ec. 2.3. De la Ec. 2.1 tenemos

$$\vec{v}_P = 0 = \vec{v}_A + \vec{\omega}_S \times \overrightarrow{AP},$$

y multiplicando escalarmente por $\vec{\omega}_S$ resulta

$$\vec{v}_A \cdot \vec{\omega}_S = 0. \quad (2.4)$$

En otras palabras, la condición $\vec{v}_P = 0$ debe cumplirse simultáneamente con la condición expresada en la Ec.2.4. Esta ecuación se satisface en dos casos:

- $\vec{v}_A = 0$. Esto corresponde a una *rotación en torno de un punto fijo A*. El EIR pasa siempre por el punto fijo A , ya que de la Ec. 2.1 tenemos

$$0 = \vec{\omega}_S \times \overrightarrow{AP},$$

y como P pertenece al EIR, concluimos que el vector $\vec{\omega}_S$ coincide con la dirección del vector \overrightarrow{AP} .

- $\vec{v}_A \perp \vec{\omega}_S$. En este caso, todas las partículas del sólido tienen velocidades ortogonales con la dirección de la velocidad angular (o al EIR). Esta situación corresponde a un *movimiento plano* en el que todas las partículas del sólido describen trayectorias planas sobre planos perpendiculares a la velocidad angular. La intersección del EIR con una cualquiera de estas láminas planas del sólido—como π —es un punto en reposo y se llama *Centro Instantáneo de Rotación* (\equiv CIR) de esa lámina.

En la Fig. 2.3 se presenta el caso del movimiento plano. La lámina plana π del sólido está contenida en el plano de la página, y el eje de rotación es perpendicular al plano. El vector \vec{v}_A es perpendicular a $\vec{\omega}_S$, y está contenido en el plano π . El punto I que corresponde al punto B de la Fig. 2.2, es el CIR, está en reposo instantáneo y su posición respecto de A está determinada por el vector

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{\omega}_S \times \vec{v}_A}{\omega_S^2}. \quad (2.5)$$

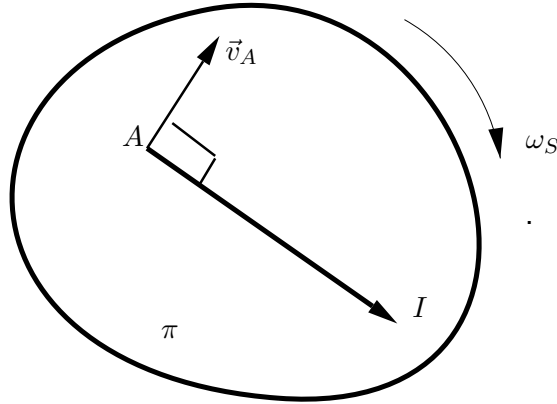


Figura 2.3: Movimiento plano

De acuerdo con esta descripción, el campo de velocidades del sólido equivale al de una rotación pura en torno del *EIR*:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_S \times \overrightarrow{IP}$$

2.4. Movimientos básicos

2.4.1. La traslación

Un sólido está en traslación cuando cualquier eje ligado a él permanece paralelo a una dirección fija en el espacio. Esto es equivalente a decir que el sólido no tiene rotación, por lo cual $\vec{\omega}_S = 0$ y $\dot{\vec{\omega}}_S = 0$.

De las Ecs. 2.1 y 2.2 resulta que

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A \quad \text{y} \quad \vec{a}_P = \vec{a}_A.$$

Si A y P son dos puntos cualesquiera del sólido y O es un observador fijo, la ecuación de la trayectoria de P será

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}(t) + \overrightarrow{AP}.$$

Pero el vector \overrightarrow{AP} es constante ya que su magnitud lo es pues se trata de un sólido indeformable, y su dirección es constante ya que el sólido no gira. Deducimos, entonces, que la trayectoria de P es igual a la trayectoria de A , aunque trasladada en un vector constante \overrightarrow{AP} . En consecuencia, *en la traslación, todas las partículas del sólido describen trayectorias iguales y en cada instante tienen la misma velocidad y la misma aceleración*. Luego, si un sólido está en traslación, desde el punto de vista cinemático podemos representarlo por un punto cualquiera de él. Desde el punto de vista dinámico, el punto a elegir para representar la traslación del sólido es el centro de masa puesto que su movimiento satisface la primera ecuación fundamental (Ec.1.4).

2.4.2. La rotación pura

Este movimiento corresponde a una rotación en torno de un eje fijo, por lo que todas las partículas describen circunferencias en planos perpendiculares al eje de rotación, y cuyos centros están ubicados sobre dicho eje.

Si elegimos como punto base un punto A del eje de rotación fijo, su velocidad y aceleración son nulos y el campo de velocidades y el campo de aceleraciones del sólido serán

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{\omega}_S \times \overrightarrow{AP} \\ \vec{a}_P &= \dot{\vec{\omega}}_S \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega}_S \times (\vec{\omega}_S \times \overrightarrow{AP}).\end{aligned}$$

De la Fig. 2.4, si \overrightarrow{CP} es el radio de la circunferencia que describe P en torno de C , podemos escribir

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}.$$

Reemplazando en las ecuaciones anteriores, encontramos que la velocidad puede expresarse como sigue

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_S \times \overrightarrow{CP}, \quad (2.6)$$

con $v_P = \omega_S \overline{CP}$.

A su vez, la aceleración se reduce a

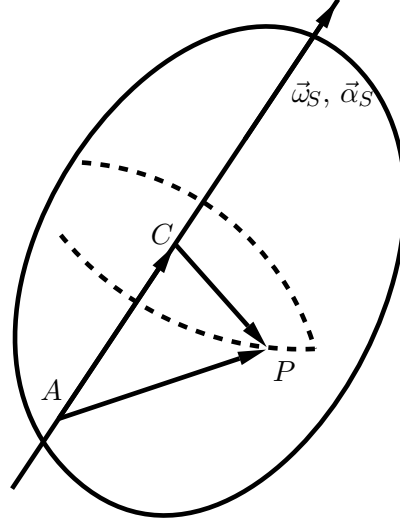


Figura 2.4: Rotación pura

$$\vec{a}_P = \vec{\alpha}_S \times \overrightarrow{CP} - \omega_S^2 \overrightarrow{CP}, \quad (2.7)$$

donde hemos introducido $\vec{\alpha}_S \equiv \dot{\vec{\omega}}_S$. El primer término de la Ec. 2.7 representa la componente tangencial de la aceleración de P ; el segundo representa la componente centrípeta de esta aceleración.

$$\left| \vec{\alpha}_S \times \overrightarrow{AP} \right| = \alpha_S \overline{CP} = a_{Pt}$$

es la magnitud de la componente tangencial, y

$$\left| \vec{\omega}_S \times (\vec{\omega}_S \times \overrightarrow{AP}) \right| = \omega_S^2 \overline{CP} = a_{Pc}$$

es la magnitud de la componente centrípeta. Todas estas cantidades son características de una partícula P en movimiento circular.

2.4.3. Otra vez el movimiento plano

En el movimiento plano, todas las partículas del sólido se mueven sobre planos paralelos a un plano fijo en el espacio, describiendo trayectorias planas.

Luego, si A y P son dos puntos cualesquiera de uno de estos planos, sus respectivas velocidades deben estar contenidas en el plano. Si proyectamos sobre el vector $\vec{\omega}_S$ la Ec. 2.1, se obtiene

$$(\vec{v}_P - \vec{v}_A) \cdot \vec{\omega}_S = 0.$$

Como A y P son dos puntos cualesquiera de la lámina, y las velocidades son coplanares con dicha lámina, se concluye que *el vector $\vec{\omega}_S$ es perpendicular al plano*. Como el plano tiene orientación constante, la dirección del vector velocidad angular es constante. Esto significa, a su vez, que *la aceleración angular es paralela a la velocidad angular*. En resumen, *durante un movimiento plano, la velocidad y aceleración angulares son perpendiculares al plano del movimiento*.

Para determinar por completo la cinemática de todos los puntos de un sólido en movimiento plano *basta conocer la cinemática de los puntos de una cualquiera de los planos del movimiento*. Esto se debe a que todos los puntos de un eje perpendicular al plano en el punto P , tienen la misma velocidad y aceleración que el punto P . Ya vimos en la sección sobre propiedades del campo de velocidades que todos los puntos de un eje paralelo a la velocidad angular tienen la misma velocidad. Veamos lo que ocurre con las aceleraciones de dos puntos A y P que pertenecen a un eje paralelo a la velocidad y aceleración angulares. Podemos escribir

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_S \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega}_S \times (\vec{\omega}_S \times \overrightarrow{AP}).$$

Como el vector \overrightarrow{AP} es paralelo al vector $\vec{\omega}_S$ y al vector $\vec{\alpha}_S$ los productos vectoriales se anulan y queda sólo

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A.$$

Según ya vimos, el EIR intersecta al plano en un punto I llamado Centro Instantáneo de Rotación (*CIR*), cuya posición respecto de un punto A está definida por la Ec. 2.5 que repetimos aquí

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\vec{\omega}_S \times \vec{v}_A}{\omega_S^2}.$$

Nótese que cuando el valor instantáneo de la velocidad angular es cero, el CIR está en el infinito y las velocidades de todas las partículas son iguales. Se dice que en este caso, el sólido está en *traslación instantánea*, pero *sólo desde*

el punto de vista del campo de velocidades, pues, en general, la aceleración angular será distinta de cero en ese instante.

Si se elige I como punto base, la velocidad de P será

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_S \times \overrightarrow{IP},$$

cumpléndose que $\vec{v}_P \perp \overrightarrow{IP}$. Esto indica que *el campo de velocidades de los puntos de la lámina plana equivale al de una rotación pura en torno del CIR*. De acuerdo con lo anterior, *para encontrar la posición del CIR en el plano del movimiento, basta determinar la intersección de las perpendiculares a las direcciones de las velocidades de dos puntos de ella, levantadas en dichos puntos*. A medida que la lámina se mueve en su plano, el CIR cambia de posición respecto de la lámina y respecto de un observador fijo, describiendo las llamadas *curvas polares*. La trayectoria respecto del observador fijo se llama *riel o polar fija*; la trayectoria respecto del observador ligado a la lámina se llama *rodante o polar móvil*.

En general, la aceleración del CIR es distinta de cero. Pero, existe siempre en la lámina en cada instante, un punto J llamado *Centro Instantáneo de Aceleración* (\equiv CIA)—en general distinto de I —cuya aceleración instantánea es nula. Usando J como punto base, la aceleración del punto P es

$$\begin{aligned}\vec{a}_P &= \vec{\alpha}_S \times \overrightarrow{JP} + \vec{\omega}_S \times (\vec{\omega}_S \times \overrightarrow{JP}). \\ \vec{a}_P &= \vec{\alpha}_S \times \overrightarrow{JP} - \omega_S^2 \overrightarrow{JP}\end{aligned}\tag{2.8}$$

Las relaciones anteriores muestran que *el campo de aceleraciones equivale al de una rotación pura en torno del CIA*.

En la Fig. 2.5 se observan la aceleración del punto P y sus componentes. La magnitud de la aceleración de un punto cualquiera P de la lámina es

$$a_P = \overrightarrow{JP} \sqrt{\alpha_S^2 + \omega_S^4},$$

o sea, es directamente proporcional a la distancia del punto al CIA. El ángulo φ que la dirección de la aceleración forma con \overrightarrow{JP} está dado por

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha_S}{\omega_S^2},$$

que no depende de la posición de la partícula P . Esto significa que en un instante cualquiera *la aceleración de un punto del plano forma un ángulo con*

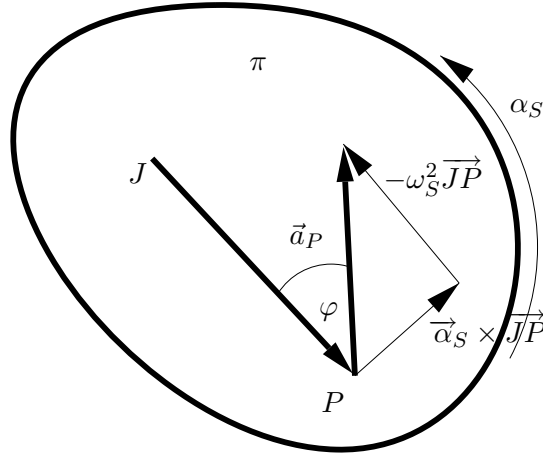


Figura 2.5: Aceleración en movimiento plano

el eje que pasa por el CIA y el punto, que es igual para todos los puntos del plano en ese instante.

Para encontrar la posición del CIA respecto de un punto P cualquiera del plano π del movimiento, multiplicamos por ω_S^2 la Ec. 2.8 y le sumamos el producto vectorial de $\vec{\alpha}_S$ por la misma ecuación. Se obtiene finalmente

$$\vec{PJ} = \frac{\vec{\alpha}_S \times \vec{a}_P + \omega_S^2 \vec{a}_P}{\alpha_S^2 + \omega_S^4} \quad (2.9)$$

2.4.4. Sólidos en contacto

Sea A el punto del sólido móvil $S1$ que está en contacto con un punto B del sólido móvil $S2$. La velocidad de un punto P del sólido $S1$ la podemos expresar como

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{S1} \times \vec{AP}.$$

o sea, como una traslación del punto A más una rotación en torno de un eje que pasa por A . Esta rotación $\vec{\omega}_{S1}$ se puede proyectar sobre un plano tangente al sólido $S1$ en A , y sobre la normal a dicho plano, levantada en A . La componente normal de la velocidad angular se llama *velocidad angular de pivoteo*; la componente tangencial es la *velocidad angular de rodadura*.

Como los sólidos son indeformables y están en contacto, las componentes normales de las velocidades de los puntos de contacto deben ser iguales: $v_{An} = v_{Bn}$, lo que implica que la velocidad relativa $\vec{v}_A - \vec{v}_B$ debe ser tangente a las superficies en el contacto. En efecto

$$\begin{aligned} v_{An} &= v_{Bn} \\ \vec{v}_A \cdot \hat{n} &= \vec{v}_B \cdot \hat{n} \\ (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \hat{n} &= 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto, la velocidad relativa entre los puntos de contacto es perpendicular a la dirección normal, o sea que está contenida en el plano de tangencia.

Cuando la velocidad relativa entre los puntos de contacto es distinta de cero, o sea, cuando $\vec{v}_A \neq \vec{v}_B$, se dice que hay *resbalamiento*. En general, se presenta rodadura y pivoteo acompañados de resbalamiento; normalmente supondremos que no hay pivoteo, salvo que digamos lo contrario en forma explícita. Si la velocidad relativa entre los puntos de contacto es nula, es decir si $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, se dice que los sólidos *ruedan sin resbalar*. En este caso, los arcos elementales ds_1 y ds_2 recorridos por A y B en un intervalo dt son iguales, lo que significa que las derivadas de estos son iguales, o sea, $\dot{s}_1 = \dot{s}_2$ y $\ddot{s}_1 = \ddot{s}_2$. La última igualdad significa que *las componentes tangenciales de las aceleraciones de los puntos de contacto son iguales, cuando un sólido rueda sin resbalar sobre otro*.

Una situación interesante se presenta cuando un sólido $S1$ rueda sin resbalar sobre otro sólido $S2$ que está en reposo, puesto que

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = 0,$$

y por lo tanto, el punto de contacto A es el *CIR* del sólido $S1$ ya que está en reposo instantáneo.

Ejemplo 2.1.- Un disco de radio r rueda sin resbalar sobre un riel S cuyo radio de curvatura es ρ . El movimiento es ya contenido en el plano de la figura. Encontrar las relaciones entre el movimiento del centro del disco y su rotación.

En la Fig. 2.6 vemos dos posiciones vecinas del disco. Después de transcurrido un tiempo dt , el centro C del disco pasa a la posición C' , y el punto de contacto A , a la posición A' . El arco elemental AE lo asimilamos a un arco elemental de la circunferencia osculatriz de radio ρ y centro de curvatura K . Por C' trazamos un eje $C'D$ paralelo a la dirección fija en el espacio CK . Este eje forma con $C'A'$ un ángulo $d\phi$ que representa el desplazamiento angular del disco. El desplazamiento angular del radio de curvatura es $d\theta$. Como el disco rueda sin resbalar, el arco AE debe ser igual al arco $A'E$.

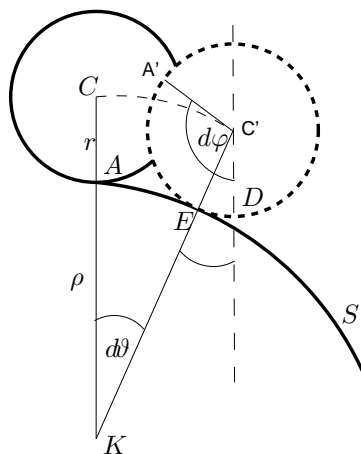


Figura 2.6: Ejemplo 2.1

Luego,

$$\rho d\theta = r(d\phi - d\theta),$$

y reordenando

$$(\rho + r)d\theta = r d\phi,$$

de donde obtenemos

$$(\rho + r)\dot{\theta} = r \dot{\phi}.$$

El primer miembro es la rapidez instantánea v_C del centro del disco, y en el segundo, $\dot{\phi}$ es la velocidad angular ω_S del disco. Resumiendo

$$v_C = \omega_S r, \quad (2.10)$$

Derivando respecto del tiempo obtenemos la componente tangencial de la aceleración de C

$$a_{Ct} = \alpha_S r. \quad (2.11)$$

Finalmente, la componente normal de la aceleración es

$$a_{Cn} = \frac{v_C^2}{\rho + r}, \quad (2.12)$$

Si el riel es rectilíneo, $\rho = \infty$ y $a_{Cn} = 0$, por lo que $a_C = a_{Ct} = \alpha_S r$

2.4.5. Composición de rotaciones

Supongamos un sistema fijo SF de origen O, y un sistema móvil SM cuyo origen es un punto A perteneciente a un sólido.

Definiendo

- $\vec{\omega}_{SM}$ = velocidad angular
absoluta del SM
 $\vec{\omega}_S$ = velocidad angular
absoluta del sólido
 $\vec{\omega}_{Sr}$ = velocidad angular
del sólido relativa
al SM ,

buscaremos una relación entre la velocidad angular absoluta y la relativa del sólido.

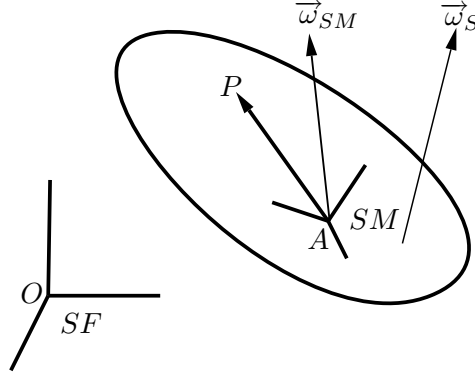


Figura 2.7: Velocidades angulares

Para el SF, la ecuación del campo de velocidades para otra partícula cualquiera P del sólido es la siguiente

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}_S \times \overrightarrow{AP}.$$

También, para el SF la ecuación del movimiento relativo de la partícula P es

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{Pr} + \vec{\omega}_{SM} \times \overrightarrow{AP}. \quad (2.13)$$

Para el SM, el movimiento relativo del sólido equivale a una rotación en torno del punto fijo A , por lo que

$$\vec{v}_{Pr} = \vec{\omega}_{Sr} \times \overrightarrow{AP}.$$

Reemplazando la última ecuación en la Ec. 2.13, e igualando con la ecuación del campo de velocidades, obtenemos

$$\vec{\omega}_S = \vec{\omega}_{SM} + \vec{\omega}_{Sr}.$$

(2.14)

Recordemos que la derivada absoluta respecto del tiempo de un vector relativo (o sea, expresado en función de sus componentes en el SM) cualquiera

\vec{A}_r satisface la relación

$$\left. \frac{d\vec{A}_r}{dt} \right|_{SF} = \left. \frac{d\vec{A}_r}{dt} \right|_{SM} + \vec{\omega}_{SM} \times \vec{A}_r. \quad (2.15)$$

El primer miembro representa la derivada absoluta, o sea, realizada por el observador fijo. El primer término del segundo miembro representa la derivada relativa, o sea, realizada por el observador móvil. Si la aplicamos a $\vec{\omega}_{Sr}$ y reemplazamos en la derivada temporal absoluta de la Ec. 2.14, obtenemos

$$\dot{\vec{\omega}}_S = \dot{\vec{\omega}}_{SM} + \dot{\vec{\omega}}_{Sr} + \vec{\omega}_{SM} \times \vec{\omega}_{Sr},$$

(2.16)

donde

$\dot{\vec{\omega}}_S$ es la aceleración angular absoluta del sólido,

$\dot{\vec{\omega}}_{SM}$ es la aceleración angular absoluta del SM , y

$\dot{\vec{\omega}}_{Sr}$ es la aceleración angular relativa al SM del sólido.

Ejemplo 2.2.- Un cono de semiángulo ϑ rueda sin resbalar sobre un cono fijo de semiángulo φ , como se muestra en la Fig. 2.8. Si el eje del cono móvil gira en torno del eje del cono fijo con velocidad angular ω_1 constante, encontrar su velocidad y aceleración angulares absolutas.

Cuando el sólido tiene un eje de simetría de revolución, conviene elegir un SM respecto del cual el sólido sólo tiene rotación en torno de ese eje. Se dice que el sólido tiene *spin* relativo al SM . Con este objeto, elegimos como SM el sistema cuyo plano (y, z) gira con velocidad angular $\vec{\omega}_1$ en torno del eje de simetría vertical z del cono fijo. El eje del cono móvil está en reposo relativo al SM en el plano (y, z) , de modo que para el observador ligado al SM este cono sólo tiene un spin relativo $\vec{\omega}_2$ que no conocemos.

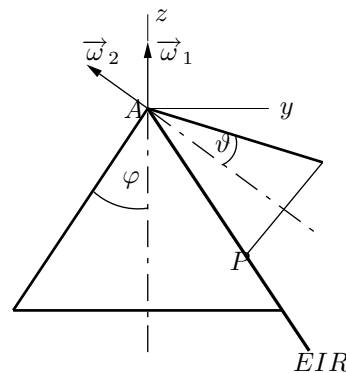


Figura 2.8: Cono que rueda

Como el cono rueda sin resbalar, todos los puntos de la generatriz de contacto están en reposo instantáneo por lo que podemos decir que el EIR coincide con dicha

generatriz y pasa por el punto fijo A que es el vértice común. Podemos escribir para un punto P del EIR

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_S \times \overrightarrow{AP} = 0 \quad \text{donde} \\ \vec{\omega}_S &= \vec{\omega}_{SM} + \vec{\omega}_{Sr}, \quad \text{o sea,} \\ \vec{\omega}_S &= \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2, \\ \vec{v}_P &= (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \overrightarrow{AP} = 0,\end{aligned}\tag{2.17}$$

y expresando los vectores en función de sus componentes cartesianas resulta

$$\begin{aligned}((\omega_1 + \omega_2 \cos(\vartheta + \varphi))\hat{k} - \omega_2 \sin(\vartheta + \varphi)\hat{j}) \times \overrightarrow{AP}(-\cos \varphi \hat{k} + \sin \varphi \hat{j}) &= 0 \\ -(\omega_1 + \omega_2 \cos(\vartheta + \varphi)) \sin \varphi \hat{i} + \omega_2 \sin(\vartheta + \varphi) \cos \varphi \hat{i} &= 0\end{aligned}$$

de donde obtenemos finalmente

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta}.$$

Reemplazando en Ec. 2.17 encontramos $\vec{\omega}_S$ en función de los datos del problema

$$\vec{\omega}_S = -\omega_1 \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \sin(\vartheta + \varphi) \hat{j} + \omega_1 \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \cos(\vartheta + \varphi) + 1 \right) \hat{k}.$$

En esta expresión sólo \hat{j} varía respecto del SF, de modo que la derivada temporal absoluta de la velocidad angular es

$$\dot{\vec{\omega}}_S = -\omega_1 \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \sin(\vartheta + \varphi) \dot{\hat{j}}.$$

Pero,

$$\dot{\hat{j}} = \vec{\omega}_{SM} \times \hat{j} = \omega_1 \hat{k} \times \hat{j} = -\omega_1 \hat{i},$$

y en consecuencia, la aceleración angular del cono móvil es

$$\dot{\vec{\omega}}_S = \omega_1^2 \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \sin(\vartheta + \varphi) \hat{i}.$$

Para las velocidades angulares podemos encontrar una solución geométrica muy simple, representando la relación vectorial de la Ec. 2.14 a escala y con los ángulos que forman entre sí. En la Fig. 2.9 se ha hecho lo indicado. Nótese que $\vec{\omega}_S$ tiene la dirección del EIR. Aplicando la ley de los senos al triángulo formado por las velocidades angulares se obtiene:

$$\frac{\omega_1}{\sin \vartheta} = \frac{\omega_2}{\sin \varphi} = \frac{\omega_S}{\sin(180 - \vartheta - \varphi)}$$

y despejando las magnitudes de las velocidades angulares resulta

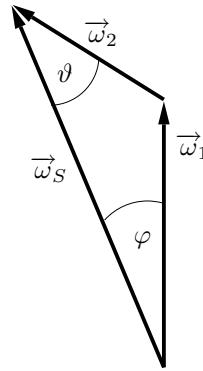


Figura 2.9: Suma vectorial

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \omega_1 \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \vartheta} \\ \omega_S &= \omega_1 \frac{\operatorname{sen}(\vartheta + \varphi)}{\operatorname{sen} \vartheta}.\end{aligned}$$

2.5. Aplicaciones