

**ME33A Mecánica de Fluidos**  
**Pauta Control 1**  
**Semestre Primavera 2004**

**Problema 1**

Se divide la fuerza total ejercida sobre el cono ( $F$ ) en 3 partes: La fuerza que ejerce la presión del aire dentro del estanque ( $F_{aire}$ ), la fuerza que ejerce el peso de la columna de líquido sobre el cono ( $F_{liq}$ ), y la fuerza que ejerce el peso del líquido en la superficie del cono ( $F_{sup}$ ).

La fuerza que ejerce la presión del aire ( $p = 50\text{kPa}$ ) dentro del estanque se calcula como:

$$F_{aire} = p \cdot A_{cono}$$

Donde  $A_{cono}$  es el área proyectada del cono en forma horizontal. Para el cono se considerará solo el volumen en contacto con el líquido.

Entonces:

$$A_{cono} = \pi R^2$$

Donde  $R = l \cdot \tan\theta$  (con  $l = 1\text{m.}$ ,  $\theta=30^\circ$ )

Por otra parte la fuerza que ejerce el peso de la columna de líquido sobre el cono ( $F_{liq}$ ) se calcula como:

$$F_{liq} = \gamma_{liq} \cdot V_{columna\ liq}$$

Con  $V_{columna\ liq} = \pi \cdot R^2 \cdot h$  ( $h = 2\text{ m.}$ )

Para la fuerza que ejerce el peso del líquido en la superficie del cono ( $F_{sup}$ ) se puede calcular de dos formas:

1. Se calcula el volumen del líquido sobre la superficie del cono.  
Como el volumen de un cono es un tercio del de un cilindro, entonces el volumen del líquido es de  $2/3$  del volumen del cilindro.

$$V_{liq\ sobre\ cono} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot l$$

Con  $l = 1\text{ m.}$

Luego la fuerza se puede calcular como:

$$F_{sup} = \gamma_{liq} \cdot V_{liq \text{ sobre cono}}$$

$$F_{sup} = \gamma_{liq} \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot l^2 \cdot \tan^2 \theta \cdot l$$

Esta fuerza está aplicada según el eje vertical del sistema.

2. La otra forma de calculo sería la siguiente (ver figura 1):

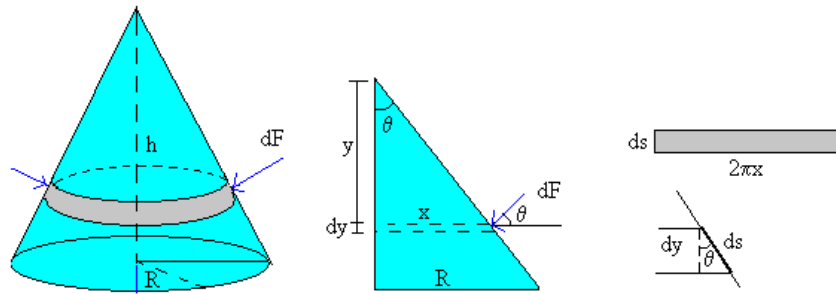


Figura 1:

Donde el diferencial de fuerza es:  $dF = \rho g y \cdot 2\pi x \cdot ds$

Además de la geometría se tiene que  $ds = \frac{dy}{\cos \theta}$

Luego la componente vertical de la fuerza es:

$$dF_v = dF \sin \theta = \rho g y \cdot \sin \theta \cdot 2\pi x \cdot ds$$

Por otro lado  $x = y \cdot \tan \theta$

Integrando se llega a que:

$$F_v = \int_0^l 2\pi \rho g y^2 \tan^2 \theta dy$$

$$F_v = \rho g \frac{l^3}{3} \cdot 2\pi \cdot \tan^2 \theta$$

$$F_v = F_{sup} = \gamma_{liq} \frac{l^3}{3} \cdot 2\pi \cdot \tan^2 \theta$$

Como se ve, los resultados son los mismos con los 2 métodos. En cuanto a la fuerza horizontal, ésta se anula debido a que la geometría es simétrica, por lo tanto  $F_h = 0$ , luego no hay necesidad de calcular la línea de acción de fuerza para el caso horizontal. La línea de acción de fuerza para el caso vertical está ubicada en la punta del cono debido a su simetría.

Finalmente la fuerza total ejercida sobre el cono es:

$$F = F_{aire} + F_{liq} + F_{sup} = p \cdot A_{cono} + \gamma_{liq} \cdot V_{columna\ liq} + \gamma_{liq} \frac{l^3}{3} \cdot 2\pi \cdot \tan^2 \theta$$

Evaluando se obtiene que  $F = 52359.81\text{ N} + 56548.67\text{ N} + 18849.56\text{ N} = 127.758\text{ kN}$

## Problema 2

De la ecuación de continuidad, se tiene que:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} d\vec{A}$$

De aqui se tiene:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} d\forall + V A$$

Con  $V = \sqrt{2gy}$  y  $A = \pi d^2/4$ . El volumen de control a considerar es el cono “grande” menos la punta de éste, por donde se drena. El volumen de la punta es:

$$\frac{\pi r^2 h}{3}$$

Donde h es la altura del cono pequeño y  $r=d/2$ . Se necesita determinar el valor de h, usando trigonometría.

$$\frac{d/2}{h} = \tan(\theta) \rightarrow h = \frac{d}{2\tan\theta}$$

Por lo que el volumen de la punta del cono es

$$\frac{\pi(d/2)^2 \frac{d}{2\tan\theta}}{3}$$

Para encontrar, el diferencial de volumen, consideramos una altura  $y(t)$ , y la relación con el radio del cono

$$r = y \tan(\theta)$$

Luego, el volumen es

$$\forall = \frac{1}{3} \pi \left( (y+h)^3 \tan(\theta)^2 - \frac{d^3}{8 \tan \theta} \right)$$

De la ecuación de continuidad:

$$0 = \frac{\partial \forall}{\partial t} + V A$$

Por regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial \forall}{\partial t} &= \frac{\partial \forall}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial \forall}{\partial y} &= \pi(y+h)^2 \tan(\theta)^2 \end{aligned}$$

Luego

$$\pi(y+h)^2 \tan(\theta)^2 \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{2gy} A$$

Separando variables

$$\frac{(y+h)^2}{\sqrt{y}} \partial y = \frac{A \sqrt{2g}}{\pi \tan(\theta)^2} \partial t$$

Integrando entre 0 e  $y_0$  y 0 y  $t$

$$\int_0^{y_0} \frac{(y+h)^2}{\sqrt{y}} \partial y = \frac{A\sqrt{2g}}{\pi \tan(\theta)^2} \int_0^t \partial t$$

$$2h^2\sqrt{y_0} + \frac{4hy_0^{3/2}}{3} + \frac{2y_0^{5/2}}{5} = \frac{A\sqrt{2g}}{\pi \tan(\theta)^2} \cdot t$$

Luego

$$t = (2h^2\sqrt{y_0} + \frac{4hy_0^{3/2}}{3} + \frac{2y_0^{5/2}}{5}) \frac{\pi \tan(\theta)^2}{A\sqrt{2g}}$$

Si solo consideramos el volumen del cono, sin restar la punta, se tiene:

$$0 = \frac{\partial \forall}{\partial t} + VA$$

Con

$$\forall = \frac{\pi \tan(\theta)^2 y^3}{3}$$

Aplicando regla de la cadena nuevamente

$$0 = \pi \tan(\theta)^2 y^2 \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = A\sqrt{2g} y^{1/2}$$

Separando variables e integrando

$$\int_0^{y_0} y^{3/2} \partial y = \frac{A\sqrt{2g}}{\pi \tan(\theta)^2} \int_0^t \partial t$$

Luego

$$t = \frac{2y_0^{5/2}}{5} \frac{\pi \tan(\theta)^2}{A\sqrt{2g}}$$

### Problema 3

Ocupando estática, se tiene

$$p_1 - \rho g((z_2 - z_1) + l + h) = p_2 - \rho g l - SG \rho g h \quad (1)$$

Por otro lado, igualando energías entre los puntos (1) y (2)

$$p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g(z_2 - z_1) \quad (2)$$

De 1, se tiene

$$p_1 - p_2 = \rho g((z_2 - z_1) + h) - SG \rho g h$$

Mientras que de 2, se tiene

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho(V_2^2 - V_1^2)}{2} + \rho g((z_2 - z_1))$$

Igualando estas dos expresiones se obtiene:

$$\rho g h(1 - SG) = \frac{\rho(V_2^2 - V_1^2)}{2}$$

Por continuidad, se tiene que

$$V_1 = V_2 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2$$

Reemplazando

$$\begin{aligned} gh(1 - SG) &= \frac{1}{2} \left( V_2^2 - V_2^2 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4 \right) \\ gh(1 - SG) &= \frac{V_2^2}{2} \left( 1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4 \right) \end{aligned}$$

Despejando  $V_2$ , se obtiene

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh(1 - SG)D_1^4}{(D_1^4 - D_2^4)}}$$

Luego

$$Q = V_2 \cdot A_2 \rightarrow Q = \frac{\pi D_1^2 D_2^2}{4} \sqrt{\frac{2gh(1 - SG)}{(D_1^4 - D_2^4)}}$$

La diferencia de presiones  $p_1 - p_2$  depende del ángulo  $\theta$  dado por la diferencia de alturas  $z_2 - z_1$ . Para un flujo dado, la diferencia de presiones  $p_1 - p_2$  obtenida con un medidor varía con  $\theta$ , pero no así la lectura del manómetro  $h$ , que es independiente de  $\theta$ .