

Tarea 2004/2
Prof. Salomé Martínez

- (1) El propósito de éste problema es demostrar el Teorema de Crandall-Rabinowitz:

Sea $F : (a, b) \times V \rightarrow Z$ es de clase C^2 con Y, Z espacios de Banach y V abierto de Y que contiene a 0 . Suponga que $F(\lambda, 0) = 0$ para $\lambda \in (a, b)$ y tal que para $\lambda_0 \in (a, b)$ 0 es un valor propio simple de $F_y(\lambda_0, 0)$; esto es

$$\dim \text{Ker}(D_y F(\lambda_0, 0)) = \text{codim } \text{Im}(D_y F(\lambda_0, 0)) = 1.$$

Sea $y_0 \in Y$ tal que $\langle y_0 \rangle = \text{Ker}(D_y F(\lambda_0, 0))$. Suponga que $D_{\lambda y} F(\lambda_0, 0)y_0 \notin \text{Im}(D_y F(\lambda_0, 0))$. Sea $W \subset Y$ un subespacio complementario cerrado de $\langle y_0 \rangle$ en Y . Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y funciones diferenciables $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, $v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W$ con $\lambda(0) = \lambda_0$, $v(0) = 0$ tal que si $F(\lambda(s), sy_0 + sv(s)) = 0$ para $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Más aún, todas las soluciones de $F(\lambda, y) = 0$ cerca de $(\lambda_0, 0)$ están contenidas en la curva $(\lambda, 0)$ o en $(\lambda(s), sy_0 + sv(s))$.

- (a) Verifique que podemos escribir

$$F(\lambda, u) = L_0 u + (\lambda - \lambda_0)L_1 u + p(\lambda, u),$$

con $L_0 = D_y F(\lambda_0, 0)$, $L_1 = D_{\lambda y} F(\lambda_0, 0)$ y $p(\lambda, 0) = 0$, $D_y p(\lambda, 0) = 0$, $D_{\lambda y} p(\lambda_0, 0) = 0$.

- (b) Considere

$$\begin{aligned} G(s, \lambda, z) &= L_0(y_0 + w) + (\lambda - \lambda_0)L_1(y_0, w) \\ &\quad + s^{-1}p(\lambda, s(y_0 + w)) \text{ si } s \neq 0 \\ G(0, \lambda, z) &= D_y F(\lambda, 0)(y_0 + w). \end{aligned}$$

Pruebe que $G : \mathbb{R} \times (a, b) \times B_W(0, \delta) \rightarrow Z$ es de clase C^1 , donde $B_W(0, \delta) = \{w \in W / \|w\| < \delta\}$ para $\delta > 0$ pequeño ($\|\cdot\|$ denota la norma en Y).

- (c) Verifique que:

$$D_{\lambda, w} G(0, \lambda_0, 0)(\hat{\lambda}, \hat{w}) = L_0 \hat{w} + \hat{\lambda} L_1 y_0.$$

- (d) Pruebe que $D_{\lambda, w} G(0, \lambda_0, 0)$ es invertible.

- (e) Concluya el Teorema.

- (2) Considere el problema de valores propios

$$(1) \quad \begin{cases} D\Delta \vec{u} + A\vec{u} = \lambda \vec{u}, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial \nu} = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

con Ω dominio acotado con frontera suave, $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)^t$, $\Delta \vec{u} = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_n)^t$, A una matriz constante de $n \times n$ y $D = (d_{ii})$ una matriz diagonal de $n \times n$ con $d_{ii} > 0$. Demuestre que los valores propios λ de (1) son soluciones de la siguiente ecuación característica

$$\text{Det}(\mu_k D + A + \lambda) = 0,$$

para $k = 0, 1, \dots$ donde μ_k es el k -ésimo valor propio de

$$\Delta w = \mu w, \text{ en } \Omega, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \text{ en } \partial\Omega.$$

¿Cuáles son las funciones propias asociadas a (1)? ¿Pueden haber espacios propios generalizados?

(3) Considere el sistema competitivo de Lotka-Volterra para dos especies:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \Delta u_1 + u_1(a_1 - c_{11}u_1 - c_{12}u_2) & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \Delta u_2 + u_2(a_2 - c_{21}u_1 - c_{22}u_2) & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u_1 > 0, u_2 > 0 & \text{en } \bar{\Omega} \times (0, \infty), \end{cases}$$

con Ω un dominio acotado con frontera suave. Las órbitas de este sistema son compactas. Los coeficientes a_i, c_{ij} juegan un rol fundamental en el comportamiento límite de este sistema. Distinguimos las siguientes situaciones:

- (a) $\frac{a_1}{a_2} > \max\{\frac{c_{11}}{c_{21}}, \frac{c_{12}}{c_{22}}\}$
- (b) $\frac{a_1}{a_2} < \min\{\frac{c_{11}}{c_{21}}, \frac{c_{12}}{c_{22}}\}$
- (c) $\frac{c_{11}}{c_{21}} > \frac{a_1}{a_2} > \frac{c_{12}}{c_{22}}$
- (d) $\frac{c_{11}}{c_{21}} < \frac{a_1}{a_2} < \frac{c_{12}}{c_{22}}$.

Si los coeficientes satisfacen (c) o (d), entonces existe un equilibrio (u_1^*, u_2^*) con $u_1^*, u_2^* > 0$.

(a) Considere el funcional:

$$V(u_1, u_2) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \alpha_i \left[u_i - u_i^* - u_i^* \log \left(\frac{u_i}{u_i^*} \right) \right]$$

con α_1, α_2 positivas. Pruebe que para una elección apropiada de α_1, α_2 la función $V(u_1(t), u_2(t))$ decrece en las órbitas (positivas) de (2) si los coeficientes satisfacen (c). ¿Qué puede decir del comportamiento límite del sistema en éste caso?

(b) En los casos (a) y (b) el sistema no admite un equilibrio constante positivo. Modifique el funcional V para demostrar que $(u_1, u_2) \rightarrow (a_1/c_{11}, 0)$ si se tiene (a) y $(u_1, u_2) \rightarrow (0, a_2/c_{22})$ si se tiene (b) cuando $t \rightarrow \infty$.

(c) Estudie si el sistema (2) puede tener equilibrios no constantes en el caso (d).

(4) Suponga que la pesca en una zona a H km de un club de campo está regulada, pero fuera de esta zona la pesca es tan excesiva que la población es efectivamente cero. Suponga que los peces se reproducen según un crecimiento logístico, se dispersan por difusión y son atrapados a una tasa E en esta zona. Consideremos el modelo

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - Eu, & \text{en } (0, H), \\ u(H, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \end{cases}$$

donde r, K, E, d son constantes positivas. Pruebe que para que la población de peces persista se debe tener que $E < r$ y $H > \sqrt{D/(r-E)}$.

(5) Considere el sistema de activador-inhibidor dado por:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - bu + \frac{u^2}{v}, & v_t = dv_{xx} + u^2 - v & \text{en } (0, \pi), \\ u_x(0, t) = v_x(0, t) = u_x(\pi, 0) = v_x(\pi, 0) = 0, \end{cases}$$

con b, d constantes positivas. Determine los estados estacionarios constantes positivos y estudie su estabilidad lineal. Determine bajo que condiciones (valores para los parámetros) el estado estacionario puede exhibir inestabilidad inducida por difusión y demuestre que bajo ciertas condiciones el sistema puede tener estados estacionarios no homogéneos.