

# La paradoja de Banach-Tarski

**Resumen.** En 1924, Banach y Tarski probaron que la esfera unitaria de  $\mathbb{R}^3$  se puede subdividir en un número finito de partes las cuales, debidamente rotadas y trasladadas, se pueden re-ensamblar para formar 2 esferas unitarias. El mismo tipo de subdivisiones “paradójicas” permiten transformar la bola unitaria en una bola de radio arbitrario, o más generalmente en un conjunto acotado con interior no vacío cualquiera. En esta nota se presenta la demostración de estos resultados descrita en [2].

## 1 Conjuntos paradójicos

Informalmente decimos que un conjunto es “paradójico” si se puede subdividir en un número finito de trozos los cuales, debidamente re-ensamblados, generan 2 copias idénticas del conjunto original. Para precisar esta noción, consideremos un conjunto  $X$  y un grupo  $G$  de transformaciones de  $X$  en sí mismo. La operación en  $G$  es la composición habitual de funciones (denotamos  $gf$  la composición de  $g$  con  $f$ ) y el neutro es la función identidad (que denotamos por 1). Todo elemento en  $G$  posee un inverso y es por lo tanto una biyección ( $g^{-1}$  denota la función inversa de  $g$ ).

### Definición 1.1

- (a)  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  se dicen  $G$ -equi-descomponibles, lo cual se denota  $A \overset{G}{\sim} B$ , si existen particiones finitas  $\{A_i\}_{i=1}^n$  y  $\{B_i\}_{i=1}^n$  de  $A$  y  $B$  respectivamente, y elementos  $g_i \in G$  tales que  $B_i = g_i(A_i)$ .
- (b)  $S \in \mathcal{P}(X)$  se dice  $G$ -paradójico si existen subconjuntos  $A, B \subseteq S$  disjuntos tales que  $A \overset{G}{\sim} S \overset{G}{\sim} B$ .

Notemos que si  $G$  es el grupo de todas las biyecciones de  $X$  entonces  $\overset{G}{\sim}$  se reduce a la equipotencia y  $X$  es paradójico ssi es de cardinal infinito. Por su parte, el resultado de Banach-Tarski establece el hecho más sorprendente de que la bola unitaria de  $\mathbb{R}^3$  puede duplicarse usando exclusivamente isometrías, a pesar de que éstas preservan volumen (la subdivisión debe ser por lo tanto no-medible). Probar la equi-descomponibilidad directamente a partir de la definición resulta en general complicado. Por ello conviene establecer en primer término algunos resultados generales que facilitan la tarea. Comencemos por observar que la equi-descomponibilidad define una relación de equivalencia sobre  $\mathcal{P}(X)$  la cual satisface adicionalmente

$$(H) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Si } A = A_1 \cup A_2 \text{ y } B = B_1 \cup B_2 \text{ con } A_1 \sim B_1 \text{ y } A_2 \sim B_2 \text{ entonces } A \sim B. \\ (b) \text{ Si } A \sim B \text{ entonces existe una biyección } f : A \rightarrow B \text{ tal que } C \sim f(C) \text{ para todo } C \subseteq A. \end{array} \right.$$

Usando esta propiedad se puede demostrar que para establecer  $A \sim B$  es suficiente probar que cada conjunto es equivalente a un subconjunto del otro. Para precisar este resultado notemos que a toda relación de equivalencia  $\sim$  sobre  $\mathcal{P}(X)$  se le puede asociar una nueva relación  $\preceq$  definida mediante

$$A \preceq B \Leftrightarrow [A \sim B' \text{ para algún } B' \subseteq B].$$

Claramente si  $A \subseteq B$  entonces  $A \preceq B$ , y además bajo la hipótesis  $(H)(b)$  se tiene que la relación  $\preceq$  es transitiva. El resultado más útil enunciado previamente es el siguiente.

**Teorema 1.1 (Banach-Schröder-Bernstein)** *Sea  $\sim$  una relación de equivalencia sobre  $\mathcal{P}(X)$  la cual satisface la propiedad  $(H)$ . Si  $A \preceq B$  y  $B \preceq A$  entonces  $A \sim B$ .*

*Demostración.* Supongamos  $A \preceq B$  y  $B \preceq A$  de modo tal que existen conjuntos  $A' \subseteq A$  y  $B' \subseteq B$  con  $A \sim B'$  y  $B \sim A'$ . Escojamos biyecciones  $f : A \rightarrow B'$  y  $g : B \rightarrow A'$  con la propiedad  $(H)(b)$  y definamos el conjunto

$$A_1 = \{(g \circ f)^n(z) : z \in A \setminus A', n \in \mathbb{N}\}.$$

En virtud de  $(H)(b)$ , el conjunto  $B_1 = f(A_1)$  es tal que  $A_1 \sim B_1$ . Del mismo modo, definiendo  $B_2 = B \setminus B_1$  y  $A_2 = g(B_2)$  tenemos  $A_2 \sim B_2$ . Dado que obviamente se tiene  $B = B_1 \cup B_2$ , la conclusión  $A \sim B$  se obtendrá de  $(H)(a)$  si establecemos que  $A = A_1 \cup A_2$ .

Para verificar que  $A_1$  y  $A_2$  son disjuntos notemos que si  $x \in A_1 \cap A_2$  entonces se puede escribir en la forma  $x = (g \circ f)^n(z)$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  y  $z \in A \setminus A'$ , y simultáneamente como  $x = g(y)$  para algún  $y \in B_2$ . De esto último se sigue que  $x \in g(B) = A'$  y como  $z \notin A'$  se deduce que  $n \neq 0$ . Por consiguiente tenemos  $x = g(f(x'))$  con  $x' = (g \circ f)^{n-1}(z) \in A_1$  con lo cual  $x = g(f(x')) = g(y)$  y de aquí  $y = f(x') \in B_1$  conduciendo al absurdo  $y \in B_1 \cap B_2 = \emptyset$ . Esto prueba que  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ .

Probemos ahora que  $A = A_1 \cup A_2$ . Para ello tomemos  $x \in A \setminus A_1$ . De la definición de  $A_1$  se tiene necesariamente  $x \in A'$  y por lo tanto existe  $y \in B$  tal que  $x = g(y)$ . Dicho  $y$  no puede estar en  $B_1$  pues en tal caso se tendría  $y = f((g \circ f)^n(z))$  para algún  $z \in A \setminus A'$  y  $n \in \mathbb{N}$ , de donde resultaría que  $x = (g \circ f)^{n+1}(z) \in A_1$  contradiciendo la elección de  $x$ . En consecuencia  $y \in B_2$  de donde obtenemos  $x = g(y) \in g(B_2) = A_2$ . Esto establece que  $A_1 \cup A_2 = A$  lo cual completa la demostración. ■

Este Teorema tiene una interesante consecuencia: los conjuntos  $A$  y  $B$  en la definición de conjunto paradójico pueden tomarse como una partición de  $S$ .

**Corolario 1.1**  *$S$  es  $G$ -paradójico ssi existe una partición  $S = A \cup B$  con  $A \stackrel{G}{\sim} S \stackrel{G}{\sim} B$ .*

*Demostración.* Basta probar la implicación directa. Sean  $A, B \subseteq S$  disjuntos con  $A \stackrel{G}{\sim} S \stackrel{G}{\sim} B$ . Dado que  $S \stackrel{G}{\sim} B \subseteq B' \triangleq (S \setminus A)$  se tiene  $S \preceq B'$  y puesto que obviamente  $B' \preceq S$ , el teorema anterior implica  $S \stackrel{G}{\sim} B'$ . Así  $A \stackrel{G}{\sim} S \stackrel{G}{\sim} B'$  con  $S = A \cup B'$ . ■

Las descomposiciones paradójicas que veremos más adelante se basan sobre el siguiente ejemplo. Recordemos que un grupo cualquiera  $G$  actúa sobre sí mismo mediante composición a la izquierda.

**Teorema 1.2** *Si  $G$  es un grupo libre con dos generadores  $\sigma$  y  $\tau$ , entonces  $G$  es  $G$ -paradójico.*

*Demostración.* Denotemos por  $W(\rho)$  el conjunto de elementos de  $G$  que comienzan por el símbolo  $\rho$ , de modo que  $G$  puede particionarse como  $G = \{1\} \cup W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$ . Claramente  $G = W(\sigma) \cup \sigma W(\sigma^{-1})$  y análogamente  $G = W(\tau) \cup \tau W(\tau^{-1})$ , lo cual prueba la equi-descomponibilidad de  $G$  con  $A = W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1})$  así como con  $B = W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$ . ■

Un grupo paradójico respecto de sí mismo induce particiones paradójicas en otros conjuntos sobre los cuales actúa. Más precisamente tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 1.3** Sea  $G$  un grupo  $G$ -paradójico actuando sobre un conjunto  $X$ , y tal que los elementos  $g \in G \setminus \{1\}$  no tienen puntos fijos en  $X$ . Entonces  $X$  es  $G$ -paradójico.

*Demostración.* Escojamos una partición  $\{A_i\}_{i=1}^n \cup \{B_j\}_{j=1}^m$  de  $G$  y elementos del grupo  $g_i, h_j \in G$  tales que  $G = \cup_{i=1}^n g_i A_i = \cup_{j=1}^m h_j B_j$ . Consideremos en  $X$  la relación de equivalencia definida por  $x \mathcal{R} y$  ssi  $x = g(y)$  para algún  $g \in G$ , y escojamos un representante de cada clase para formar un subconjunto  $M \subseteq X$ . La inexistencia de puntos fijos no triviales implica que la familia  $\{g(M)\}_{g \in G}$  es una partición de  $X$ . Definiendo  $A'_i = \cup \{g(M) : g \in A_i\}$  y  $B'_j = \cup \{g(M) : g \in B_j\}$  obtenemos una partición finita de  $X$  tal que  $X = \cup_{i=1}^n g_i(A'_i) = \cup_{j=1}^m h_j(B'_j)$  lo cual prueba que  $X$  es  $G$ -paradójico. ■

## 2 Conjuntos paradójicos usando isometrías

Sea  $G_n$  el grupo de isometrías de  $X = \mathbb{R}^n$ . Recordemos que toda isometría de  $\mathbb{R}^n$  es una aplicación lineal afín, esto es, una isometría lineal seguida de una translación. Las isometrías lineales  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , caracterizadas por  $A^t A = I$ , constituyen un subgrupo  $O_n$  llamado subgrupo ortogonal, el cual junto con actuar sobre  $X = \mathbb{R}^n$  también actúa sobre la esfera y la bola unitaria de  $\mathbb{R}^n$ . El subgrupo ortogonal especial  $SO_n$  corresponde a las isometrías lineales  $A \in O_n$  que preservan la orientación, vale decir  $\det(A) = 1$ . Más específicamente, en el caso de  $\mathbb{R}^2$  el grupo  $SO_2$  está formado exclusivamente por las rotaciones, mientras que  $O_2$  incluye además las reflexiones respecto de rectas que pasan por el origen. Para el caso de  $\mathbb{R}^3$  todo elemento  $A \in SO_3$  admite el valor propio 1 y corresponde por lo tanto a una rotación en torno al eje definido por el vector propio correspondiente.

**Teorema 2.1** Existen rotaciones  $\sigma, \tau \in SO_3$  que generan un subgrupo libre de  $SO_3$ .

*Demostración.* Sean  $\sigma, \tau \in SO_3$  las rotaciones en un ángulo  $\arccos(1/3)$  en torno a los ejes  $z$  y  $x$  respectivamente, para las cuales se tiene explícitamente

$$\sigma^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tau^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Debemos probar que todo  $w$  obtenido mediante composiciones sucesivas de  $\sigma, \sigma^{-1}, \tau$  y  $\tau^{-1}$  es distinta de la identidad. Suponemos que  $w$  está en forma reducida (*i.e.* se han eliminado todas las sub-expresiones del tipo  $\rho\rho^{-1}$ ) y denotamos por  $|w|$  la cantidad de factores que intervienen en  $w$ . Notemos además que, usando las conjugaciones  $w \rightsquigarrow \tau w \tau^{-1}$  y  $w \rightsquigarrow \tau^{-1} w \tau$ , no perdemos generalidad al suponer que  $w$  comienza por la derecha con  $\sigma$  o bien  $\sigma^{-1}$ . Razonaremos inductivamente sobre el largo  $|w|$  mostrando que  $w(x) \neq x$  para  $x = (1, 0, 0)^t \in S^2$ , de lo cual se sigue la conclusión deseada  $w \neq 1$ .

Probaremos que  $w(x) = \frac{1}{3^{|w|}}(a, b\sqrt{2}, c)^t$  con  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  y  $b$  no divisible por 3 (en particular  $b \neq 0$  y por consiguiente  $w(x) \neq x$ ). Claramente  $w(x)$  es de esta forma si  $|w| = 1$ , vale decir en los casos  $w = \sigma$  y  $w = \sigma^{-1}$ . Por otra parte, al aplicar  $\sigma, \sigma^{-1}, \tau$  o  $\tau^{-1}$  a un vector de la forma  $\frac{1}{3^k}(a, b\sqrt{2}, c)^t$  se obtiene el vector  $\frac{1}{3^{k+1}}(a', b'\sqrt{2}, c')^t$  con  $a', b', c' \in \mathbb{Z}$  dados por

$$\begin{cases} a' = a \mp 4b ; b' = b \pm 2a ; c' = 3c & \text{para } \sigma^{\pm 1}, \\ a' = 3a ; b' = b \mp 2c ; c' = c \pm 4b & \text{para } \tau^{\pm 1}. \end{cases} \quad (1)$$

Veamos que  $b$  nunca es divisible por 3. Para  $|w| = 1$  y  $|w| = 2$  ello se verifica de manera directa. Sea  $k \geq 2$  tal que la propiedad vale para todo  $w$  con  $|w| \leq k$ . Sea  $w$  con  $|w| = k + 1$  y sean  $\rho_1, \rho_2 \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$  las dos primeras operaciones de modo que  $w = \rho_1 \rho_2 \tilde{w}$  con  $|\tilde{w}| = k - 1$ . Denotando  $\tilde{w}(x) = \frac{1}{3^{k-1}}(a, b\sqrt{2}, c)$ ,  $\rho_2 \tilde{w}(x) = \frac{1}{3^k}(a', b'\sqrt{2}, c')$  y  $\rho_1 \rho_2 \tilde{w}(x) = \frac{1}{3^{k+1}}(a'', b''\sqrt{2}, c'')$ , tenemos por hipótesis de inducción que  $b'$  no es divisible por 3. Usando (1) y distinguiendo los casos posibles (notar que  $\rho_1$  y  $\rho_2$  no pueden ser uno el inverso del otro pues  $w$  está en forma reducida) obtenemos

$$b'' = \begin{cases} b' \pm 6a & \text{si } \rho_1 = \sigma^{\pm 1}, \rho_2 = \tau^{\pm 1} \\ b' \pm 6c & \text{si } \rho_1 = \tau^{\pm 1}, \rho_2 = \sigma^{\pm 1} \\ 2b' - 9b & \text{si } \rho_1 = \rho_2 \end{cases}$$

de modo que  $b''$  tampoco es divisible por 3, lo cual completa la etapa de inducción. ■

**Teorema 2.2** *Sea  $G \subseteq SO_3$  un subgrupo libre con 2 generadores y sea  $D \subseteq S^2$  el conjunto de todos los puntos fijos de los elementos  $g \in G \setminus \{1\}$ . Entonces  $D$  es numerable,  $G$  actúa sobre  $S' = S \setminus D$ , y  $S'$  es  $G$ -paradójico.*

*Demostración.* Cada rotación  $\sigma \in SO_3 \setminus \{1\}$  deja fijo un eje y tiene por lo tanto exactamente 2 puntos fijos en  $S^2$ . Dado que  $G$  es numerable se sigue que  $D$  es numerable. Para ver que  $G$  actúa sobre  $S'$  observamos que si  $x \in S'$  y  $g \in G$  son tales que  $g(x) \notin S'$ , entonces  $g(x) \in D$  y existirá  $h \in G \setminus \{1\}$  tal que  $h(g(x)) = g(x)$ . De aquí resulta  $g^{-1}hg(x) = x$  y como  $x \notin D$  obtenemos  $g^{-1}hg = 1$ , de donde  $hg = g$  y por lo tanto  $h = 1$  lo cual es una contradicción. Finalmente, dado que  $G$  actúa sobre  $S'$  sin puntos fijos no triviales, los Teoremas 1.2 y 1.3 implican que  $S'$  es  $G$ -paradójico. ■

**Teorema 2.3** *Si  $D \subseteq S^2$  es numerable entonces  $S^2 \stackrel{SO_3}{\sim} (S^2 \setminus D)$ .*

*Demostración.* Escojamos un vector  $v \in (S^2 \setminus D)$  y denotemos por  $\rho_\theta$  la rotación en un ángulo  $\theta \in [0, 2\pi)$  en torno al eje  $v$ . Para cada  $x \in D$  sea  $\Theta_x$  el conjunto de ángulos  $\theta \in [0, 2\pi)$  tales que  $\rho_\theta^k(x) \in D$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ . Cada  $\Theta_x$  es numerable y por lo tanto  $\Theta \triangleq \bigcup_{x \in D} \Theta_x$  es también numerable. Escogiendo un ángulo  $\theta \in [0, 2\pi) \setminus \Theta$  tenemos que los conjuntos  $\{\rho_\theta^k(D)\}_{k \in \mathbb{N}}$  son disjuntos de a pares. Tomando  $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \rho_\theta^k(D)$  obtenemos  $\rho_\theta(A) = A \setminus D$ , con lo cual

$$S^2 = (S^2 \setminus A) \cup A \stackrel{SO_3}{\sim} (S^2 \setminus A) \cup \rho_\theta(A) = S^2 \setminus D. \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.4 (Banach-Tarski)** *La esfera unitaria  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  es  $SO_3$ -paradójica.*

*Demostración.* Los Teoremas 2.2 y 2.3 implican que  $S^2$  es  $SO_3$ -equi-descomponible con un conjunto  $SO_3$ -paradójico  $S' \subseteq S^2$ , y por consiguiente  $S^2$  es  $SO_3$ -paradójico. ■

**Teorema 2.5 (Banach-Tarski)** *La bola unitaria  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  es  $G_3$ -paradójica.*

*Demostración.* La descomposición de  $S^2$  permite construir una descomposición de  $B \setminus \{0\}$  usando una correspondencia radial  $x \mapsto \{\alpha x : 0 < \alpha \leq 1\}$ . Por lo tanto basta probar que  $B \stackrel{G_3}{\sim} B \setminus \{0\}$ . Para ello basta considerar  $\rho_\theta \in G_3$  una rotación en torno al eje vertical que pasa por el punto  $(\frac{1}{2}, 0, 0)$  con un ángulo  $\theta$  racionalmente independiente de  $2\pi$ . Tomando  $N = \{\rho_\theta^k(0) : k \in \mathbb{N}\} \subseteq B$  obtenemos

$$B = (B \setminus N) \cup N \stackrel{G_3}{\sim} (B \setminus N) \cup \rho_\theta(N) = B \setminus \{0\}. \quad \blacksquare$$

Es fácil ver que el Teorema 2.4 se aplica a toda esfera centrada en el origen independiente de su radio, mientras que el Teorema 2.5 se aplica a cualquier bola. Usando este último resultado se obtiene la siguiente versión más fuerte.

**Teorema 2.6 (Banach-Tarski)** *Si  $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$  son acotados con interior no vacío entonces  $A \stackrel{G_3}{\sim} B$ .*

*Demostración.* En virtud del Teorema 1.1 basta probar  $A \preceq B$ . Tomemos una bola  $B_1$  tal que  $A \subseteq B_1$  y una bola  $B_2 \subseteq B$ . Usando el Teorema 2.5 reiteradamente para obtener réplicas de  $B_2$  y utilizando traslaciones apropiadas podemos cubrir  $B_1$  mediante copias (traslapadas) de  $B_2$ . A partir de aquí se deduce fácilmente que  $B_1 \preceq B_2$  y usando la transitividad de  $\preceq$  se concluye  $A \preceq B$ .  $\blacksquare$

## References

- [1] S. Banach S. & A. Tarski, “Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents”, *Fund. Math.* **6** (1924), 244–277.
- [2] S. Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge University Press, New York, New York (1985).