

Sea λ_0 punto de partida (en el método de Newton), λ_1 “cercano” a $\bar{\lambda}$ tal que existen $k_1 > 0, k_2 > 0$ de modo que

$$\frac{1}{|g''(\lambda)|} \leq k_1 \text{ y } \frac{|g'(\bar{\lambda}) - g'(\lambda) - g''(\lambda)(\bar{\lambda} - \lambda)|}{|\bar{\lambda} - \lambda|} \leq k_2$$

para todo λ que cumple $|\lambda - \bar{\lambda}| \leq |\lambda_0 - \bar{\lambda}|$. Entonces el método converge a $\bar{\lambda}$.

Busqueda multidimensional usando derivadas

(P) : Min $\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \text{Dom } f\}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable dada.

Estos métodos determinan en cada iteración k :

- una dirección de descenso \mathbf{d}_k .
- un nuevo punto \mathbf{x}_{k+1} , usando $\mathbf{x}_k, \mathbf{d}_k$, y eventualmente la información de 1^{er}, 2^{do} orden (asociadas a \mathbf{x}_k).

Método del gradiente o de descenso más rapido

Este método esta basado en la siguiente propiedad.

Propiedad. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en \mathbf{x} tal que $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, y sea $P_{\mathbf{x}}$ el problema:

$$P_{\mathbf{x}} : \text{Min } \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{d}}(\mathbf{x}) : \|\mathbf{d}\| \leq 1 \right\} = \text{Min } \{ \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d} : \|\mathbf{d}\| \leq 1 \}$$

El óptimo de $P_{\mathbf{x}}$ es $\bar{\mathbf{d}} = -\nabla f(\mathbf{x})/\|\nabla f(\mathbf{x})\|$, i.e., $\bar{\mathbf{d}}$ es dirección de descenso más rapido de f en \mathbf{x} .

Las etapas básicas del método son:

0. Partir con $\varepsilon > 0$ (tolerancia), y con un punto \mathbf{x}_0 (“adivinanza”), $k = 0$.
1. (iteración k). Calcular $\nabla f(\mathbf{x}_k)$. Si $\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| < \varepsilon$, terminar con $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_k$ (aproximación a un mínimo (local) de f). Caso contrario, sea $\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$ y calcular λ_k el valor de λ que minimiza la función $g(\lambda) = f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k)$, ir a 2.
2. Sea $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k$. Hacer $k = k + 1$, y volver a 1.

Método de Newton

Este método procede en forma similar al caso de una dimensión, i.e., para varias variables, tambien usa la aproximación de Taylor de segundo orden de f en \mathbf{x}_k

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T H(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$$

donde $H(\mathbf{x}_k)$ es la matriz Hessiana de f en \mathbf{x}_k .