METODOS DE BUSQUEDA PARA PROBLEMAS SIN RESTRICCIONES

(P): Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, encontrar $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$, para $\mathbf{x} \in V(\bar{\mathbf{x}}) \subset$ Dom f donde $V(\bar{\mathbf{x}})$ es una vecindad de $\bar{\mathbf{x}}$.
Si $V(\bar{\mathbf{x}}) =$ Dom $f, \bar{\mathbf{x}}$ es un **mínimo global** de f. Si $V(\bar{\mathbf{x}}) \neq$ Dom $f, \bar{\mathbf{x}}$ es un **mínimo local** de f (si $f(\bar{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in V(\bar{\mathbf{x}}), \bar{\mathbf{x}}$ es un **máximo**).

Condiciones necesarias para la optimalidad de (P)

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función diferenciable en $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}} \in$ Int (Dom f). Si $\bar{\mathbf{x}}$ es **óptimo** de f (min. o max.), entonces $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función dos veces diferenciables en $\bar{\mathbf{x}}$ si $\bar{\mathbf{x}}$ es óptimo de f, entonces se cumplen:
   $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ y $H_f(\bar{\mathbf{x}})$ es definida semi-positiva ($\bar{\mathbf{x}}$ mínimo) o definida semi-negativa ($\bar{\mathbf{x}}$ máximo).

Condiciones suficientes para la optimalidad de (P)
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función dos veces diferenciables en $\bar{\mathbf{x}} \in$ Int (Dom f). Si f en $\bar{\mathbf{x}}$ cumple: $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ y $H_f(\bar{\mathbf{x}})$ es definida positiva (resp.negativa), entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es un punto mínimo (local) de f (resp.$\bar{\mathbf{x}}$ es un punto máximo (local) de f).
La condición suficiente de orden 2 puede ser reemplazada por la siguiente:
Para alguna vecindad $V(\bar{\mathbf{x}})$, la matriz Hessiana $H_f(\mathbf{x})$ es definida semi-positiva para todo $\mathbf{x}$ en $V(\bar{\mathbf{x}})$ para que $\bar{\mathbf{x}}$ sea mínimo de f (resp. definida semi-negativa para $\mathbf{x} \in V(\bar{\mathbf{x}})$, para que $\bar{\mathbf{x}}$ sea máximo).
Los métodos de busqueda estan basados en la noción de **dirección de descenso** de f en un punto dado: Un vector $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ es una dirección de descenso de f en $\bar{\mathbf{x}} \in$ Int (Dom f) ssi existe $\alpha > 0$ tal que

$$f(\bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) \leq f(\bar{\mathbf{x}}), \text{ para } 0 < \lambda < \alpha \text{ (para minimizar } f)$$

Los métodos de busqueda para determinar un (candidato a) mínimo de f consisten en las siguientes etapas básicas (se supone que f es diferenciable):

0. Partir con un punto $\mathbf{x}^{(0)}$, tolerancias $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, y $k = 0$.

1. (etapa k) Calcular $\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$. Si $||\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})|| < \varepsilon_1$, terminar. En caso contrario, determinar $\mathbf{d}_k$ una dirección de descenso de f en $\mathbf{x}^{(k)}$.
   Calcular $\bar{\lambda}$ que minimiza $f(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda \mathbf{d}_k)$ ir a 2.

2. Definir $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \bar{\lambda} \mathbf{d}_k$. Si $||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}|| < \varepsilon_2$, terminar. En caso contrario, reemplazar k por $k + 1$ y volver a 1.

En la etapa 1, se debe resolver un problema unidimensional, para minimizar la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por:

$$g(\lambda) = f(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda \mathbf{d}_k), (\lambda \in S_\lambda)$$