PROGRAMACION NO-LINEAL

En las presentes notas se establecen condiciones necesarias para la optimalidad de una función dada sobre un conjunto dado, las cuales bajo ciertas hipotesis adicionales son también condiciones suficientes para la optimalidad del problema en estudio.
Los tipos de problemas que serán considerados son los siguientes:

I. **Problemas sin restricciones**
Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ encontrar $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$, para $\mathbf{x} \in V(\bar{\mathbf{x}})$ donde $V(\bar{\mathbf{x}})$ es una vecindad de $\bar{\mathbf{x}}$.
Si $V(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathbf{x}}$ es un **mínimo global** de f, y si $V(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbb{R}^n, \bar{\mathbf{x}}$ se llama un **mínimo global** def. **local** de f.

II. **Problemas con restricciones de igualdad**
Dadas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$, encontrar $\bar{\mathbf{x}} \in S = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \ldots, m\}$ tal que $f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$, para $\mathbf{x} \in S$.

III. **Problemas con restricciones de desigualdades**
Dadas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$, encontrar $\bar{\mathbf{x}} \in S = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, m\}$ tal que $f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$, para $\mathbf{x} \in S$.

IV. **Problemas con restricciones de desigualdades e igualdades**
Dadas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$ y $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, l$, encontrar $\bar{\mathbf{x}} \in S = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, m \; h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \ldots, l\}$ tal que $f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x})$, para $\mathbf{x} \in S$.

Las siguientes nociones son básicas para los problemas en estudio.

Definición 1.(dirección de descenso)
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\bar{\mathbf{x}} \in D$. Un vector $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ se llama una **dirección de descenso** (resp.**ascenso**) de f en $\bar{\mathbf{x}}$ ssi existe $\alpha > 0$ tal que

$$f(\bar{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{d}) < f(\bar{\mathbf{x}}), \text{ para } 0 < \lambda < \alpha$$
$$(\text{resp.} f(\bar{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{d}) > f(\bar{\mathbf{x}}), \text{ para } 0 < \lambda < \alpha)$$

Definición 2. (dirección factible)
Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ (no vacio) y $\bar{\mathbf{x}} \in S$. Un vector $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ es una **dirección factible** de S en $\bar{\mathbf{x}}$ ssi existe $\alpha > 0$ tal que $\bar{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{d} \in S$, para $0 < \lambda < \alpha$.

Prop.1 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\bar{\mathbf{x}}$. Si $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ es un vector tal que $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{d} < 0$, entonces $\mathbf{d}$ es una dirección de descenso de f en $\bar{\mathbf{x}}$.

Importante: Si $F_0 = \{\mathbf{d} : \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot d < 0\}$, entonces para $n = 2$, el conjunto F_0 es el **semiplano** determinado por la recta perpendicular a $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$ que pasa por $\bar{\mathbf{x}}$ y que **no contiene a** $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$.