(6) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en un convexo abierto $C \subset \mathbb{R}^n$.
Si la matriz Hessiana de f es definida positiva en cada punto de C, entonces f es estrictamente convexa.
(reciproco no se cumple: $f(x) = x^4$ es estrictamente convexa, pero $f''(x) = 12x^2$ i.e. $f''(x) > 0$ si $x \neq 0$ y $f''(0) = 0$ i.e. la "matriz Hessiana" de f es **definida semi-positiva**).

OPTIMALIDAD Y FUNCIONES CONVEXAS

Sea (P) : $\text{Min}\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\}$, donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa en $S \subset \mathbb{R}^n$, S convexo.

(1) Si $\bar{\mathbf{x}} \in S$ es una solución óptima de (P), entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es **óptimo global** de (P).

(2) $\bar{\mathbf{x}} \in S$ es solución óptima de (P) ssi $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in S$.

(3) Si $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{Int.}(S)$, entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es solución óptima de (P) ssi $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$.

(4) Sea $\bar{\mathbf{x}} \in S$ tal que $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Si f es convexa, entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es un óptimo global de (P). Si f es estrictamente convexa, entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es la única solución global.

III. PROBLEMAS CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD

El tipo de problemas que se considera en esta sección se define de la siguiente manera:
Dadas las funciones $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$, encontrar $\bar{\mathbf{x}} \in S$,tal que $f(\bar{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S$ donde $S = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, m\}$, i.e.,$\bar{\mathbf{x}}$ es solución óptima del problema:

$$(P) : \text{ Min } \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\}$$

El siguiente resultado establece una condición necesaria (casi evidente) para la optimalidad de (P) : si $\bar{\mathbf{x}}$ es un óptimo de (P), entonces **no puede existir una dirección que sea de descenso y sea factible simultaneamente**, asociada a $\bar{\mathbf{x}}$.

Prop.8. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función diferenciable en $\bar{\mathbf{x}} \in C$, donde $C \subset \mathbb{R}^n$.
Si $\bar{\mathbf{x}}$ es un óptimo (local) de f/C entonces $F_0 \cap D = \phi$, donde $F_0 = \{d : \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot d < 0\}$ (es el conjunto de direcciones de descenso de f en $\bar{\mathbf{x}}$), y D es el conjunto de las direcciones factibles de C en $\bar{\mathbf{x}}$.
Si $C = S = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, m\}$, entonces la propiedad anterior se puede establecer explicitamente en terminos de las funciones f y $g_i, i = 1, \ldots, m$, de la siguiente manera.

Prop.9 Sea (P) : $\text{Min}\{f(\mathbf{x}) : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, m, \mathbf{x} \in X\}$, donde $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. Sea $\bar{\mathbf{x}} \in S$ y sea $I = \{i : g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$, donde $S = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, m, \in X\}$.
Si las funciones f y g_i son diferenciables en $\bar{\mathbf{x}}, i = 1, \ldots, m$, y si $\bar{\mathbf{x}}$ es un óptimo (mínimo) de (P), entonces $F_0 \cap G_0 = \phi$, donde $F_0 = \{\mathbf{d} : \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{d} < 0\}$ y $G_0 = \{\mathbf{d} : \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{d} < 0, i \in \mathbf{I}\}$.