donde P es la matriz de $n \times |I|$ cuyas columnas son los vectores $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$, $i \in I$, Q es la matriz de $n \times l$, cuyas columnas son los vectores $\nabla h_j(\bar{\mathbf{x}})$, $j = 1, \ldots, l$ y $\mathbf{b} = -\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$, $\mathbf{u}$ es un vector de $|I| \times 1$, tal que $u_k \equiv \alpha_{i_k}$, $k = 1, \ldots, s$, donde $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$, y $\mathbf{V} = \beta$ es un vector de $l \times 1$.

Problema con restricciones de desigualdades (EJEMPLO)

(P) Min $\{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 5, x_1 + 2x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.
Determinar el conjunto de los puntos $(a, b) \in S$ que son candidatos a óptimo de (P).

Solución. Un punto (a, b) es candidato a óptimo de (P) ssi (a, b) cumple uno y solo uno de los siguientes:

- $(a, b) \in \text{Int}(S)$ y $\nabla f(a, b) = (0, 0)$,
  ó
- $(a, b) \in \text{Fr}(S)$ y $F_0 \cap G_0 = \phi$, donde F_0, G_0 son los conjuntos asociados a (a, b).
  $F_0 = \{\mathbf{d} : \nabla f(a, b) \cdot \mathbf{d} < 0\}$ y $G_0 = \{\mathbf{d} : \nabla g_i(a, b) \cdot \mathbf{d} < 0, i \in I\}$;
  $I = \{i : g_i(a, b) = 0\}$,
  donde $\text{Int}(S)$ es el **interior** de S y $F_r(S)$ es la **frontera** de S.

($(a, b) \in \text{Int}(S)$ ssi (a, b) es el **centro de un disco contenido** en S y $(a, b) \in F_r(S)$ ssi **todo** disco centrado en (a, b) intersecta a S y a su complemento).
En el ejemplo, $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 x$, no cumple la primera condición, ya que (3,2) es el único punto que cumple $\nabla f(3, 2) = (0, 0)$ y claramente, $(3, 2) \notin S(3^2 + 2^2 \nleq 5)$, y por lo tanto, solo se cumple la segunda condición, i.e., $(a, b) \in F_r(S)$ y por lo tanto, los candidatos a óptimo estan en $Fr(S)$.
En el ejemplo, $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5$; $g_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 4$; $g_3(x_1, x_2) = -x_1$; $g_4(x_1, x_2) = -x_2$.
La representación grafica de S permite determinar que $(a, b) \in Fr(S)$ ssi (a, b) cumple uno de los siguientes casos:

(1) $g_1(a, b) = 0$; (2) $g_2(a, b) = 0$; (3) $g_3(a, b) = 0$; (4)$g_4(a, b) = 0$;
(5) $g_1(a, b) = 0$ y $g_2(a, b) = 0$; (6) $g_1(a, b) = 0$ y $g_4(a, b) = 0$;
(7) $g_2(a, b) = 0$ y $g_3(a, b) = 0$; (8)$g_3(a, b) = 0$ y $g_4 = (a, b) = 0$

En lo que sigue se determina los puntos $(a, b) \in F_r(S)$ candidatos a óptimo de (P), para lo cual se requiere calcular: $\nabla f(a, b)$ y $\nabla g_i(a, b), i = 1, 2, 3, 4$
$\nabla f(x_1, x_2) = (2(x_1 - 3), 2(x_1 - 2))$;
$\nabla g_1(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$; $\nabla g_2(x_1, x_2) = (1, 2)$; $\nabla g_3(x_1, x_2) = (-1, 0)$;
$\nabla g_4(x_1, x_2) = (0, -1)$.