Prop.7. Sean Q una matriz de $n \times n$ simetrica, y A una matriz de $m \times n$ tales que $r(A) = m$, y sea $U = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = 0\}$. Entonces, Q es definida positiva sobre U ssi

$$(-1)^m \det \begin{pmatrix} Q_{pp} & A_{mp}^T \\ A_{mp} & 0 \end{pmatrix} > 0, \text{ para } p = m+1, \ldots, n.$$

Analogamente, Q es definido negativo sobre U ssi

$$(-1)^p \det \begin{pmatrix} Q_{pp} & A_{mp}^T \\ A_{mp} & 0 \end{pmatrix} > 0, \text{ para } p = m+1, \ldots, n.$$

FUNCIONES CONVEXAS

Definición. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice que es **convexa** en un conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ ssi

$$f(\lambda \mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'') \leq \lambda f(\mathbf{x}') + (1-\lambda) f(\mathbf{x}'')$$

para todo $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in C$, y todo $0 \leq \lambda \leq 1$.

Observación: Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** ssi $\lambda \mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'' \in C$, para todo $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in C$, y todo $0 \leq \lambda \leq 1$ ssi el **segmento lineal** que une $\mathbf{x}'$ con $\mathbf{x}''$ esta contenido en C, para todo $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in C$,
i.e. $SL(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'', 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset C$.

Propiedades.

(1) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa en un conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$, y sea $C(\alpha, f) = \{\mathbf{x} \in C : f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$, **el conjunto de nivel** α de $f, \alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, $C(\alpha, f)$ es convexo.

(2) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función convexa en un conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$, entonces f es continua en el interior de C.

(3) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa en un conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ es un vector no-nulo tal que $\bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d} \in C$, para $\bar{\mathbf{x}} \in C$ y $0 < \lambda < \alpha$ (algun $\alpha > 0$),i.e., $\mathbf{d}$ es **dirección factible** para C en $\bar{\mathbf{x}}$, entonces existe la **derivada direccional** de f en $\bar{\mathbf{x}}$,i.e. existe

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{d}}(\bar{\mathbf{x}}) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}) - f(\bar{\mathbf{x}})}{t}$$

(4) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una **función diferenciable** en un conjunto convexo abierto $C \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, f es **convexa** en C ssi para todo $\bar{\mathbf{x}} \in C$ se cumple

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla f(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \text{ todo } \mathbf{x} \in C$$
$$\Leftrightarrow (\nabla f(\mathbf{x}'') - \nabla f(\mathbf{x}')) \cdot (\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') \geq 0, \text{ todo } \mathbf{x}' \text{ y } \mathbf{x}'' \in C$$

(5) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función **dos veces diferenciable** en un conjunto convexo abierto $C \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, f es **convexa** en C ssi la matriz Hessiana de f es definida semi-positiva en cada $\mathbf{x} \in C$.