En la propiedad anterior se demuestra que **todo** vector $\mathbf{d} \in G_0$ es una dirección factible de S en $\bar{\mathbf{x}}$. El resultado que establece esta propiedad es de tipo geométrico, pero tambien se puede dar analiticamente, como lo establece la siguiente propiedad.

Condiciones necesarias de Fritz-John para la optimalidad de (P)

Prop.10. Sea (P) el problema: Min $\{f(\mathbf{x}) : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, m,$ $\mathbf{x} \in, X \subset I\!\!R^n$ abierto$\}$, tal que

(1) f y g_i son diferenciables en $\bar{\mathbf{x}}, i = 1, \ldots, m$

(2) $\bar{\mathbf{x}} \in S = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, m, \mathbf{x} \in X\}$

(3) $I = \{i : g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$

Si $\bar{\mathbf{x}}$ es solución óptima (local) de (P), entonces existen escalares α_0 y $\alpha_i, i \in I$ tales que

$$\begin{aligned}
\alpha_0 \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} \alpha_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) &= \mathbf{0} \\
\alpha_0 \geq 0, \alpha_i \geq 0, i \in I& \\
(\alpha_0, \alpha_I) \neq \mathbf{0}, \alpha_I \text{ es el vector con componentes } \alpha_i, i \in I& \\
\alpha_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0, i \in I \; (\alpha_i = 0, i \notin I)&
\end{aligned}$$

Condiciones necesarias de Kuhn-Tucker-Karush para la optimalidad de (KTK)

Prop.11. Se supone que para el problema (P) se cumplen las hipotesis (1),(2) y (3) de la propiedad anterior. Además, se supone que $\bar{\mathbf{x}}$ cumple:

(4) los vectores $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}), i \in I$, son **linealmente independientes.**

Bajo estas **cuatro** hipotesis, si $\bar{\mathbf{x}}$ es una solución ótpima (local) de (P), entonces existen escalares $\alpha_i, i \in I$ tales que

$$\begin{aligned}
\text{(CKTK):} \quad \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} \alpha_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) &= 0 \\
\alpha_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0, i \in I \; (\alpha_i = 0, i \notin I)& \\
\alpha_i \geq 0, i \in I&
\end{aligned}$$

Condiciones suficientes para la optimalidad de KTK

Prop.12. Se supone que para el problema (P) : Min$\{f(\mathbf{x}) : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, m, \mathbf{x} \in X\}$, se cumplen las cuatro hipotesis de la propiedad anterior. Además, se supone que f y $g_i, i \in T$ cumplen lo siguiente:

(5) f y $g_i, i \in I$ son convexas en $V(\bar{\mathbf{x}})$.

Si $\bar{\mathbf{x}}$ satisface las condiciones establecidas en la propiedad anterior, i.e., (CKTK), entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es una solución óptima (local) de (P).