IV PROBLEMAS CON IGUALDADES Y DESIGUALDAD

Dadas las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \dots, m, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, l$, y dado $X \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, se define el siguiente problema (P) asociado a estas funciones y a X:

$$
\begin{aligned}
(P):\ \ &\text{Min } f(\mathbf{x})\\
&\text{s.a.}\\
&g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m\\
&h_j(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, l\\
&\mathbf{x} \in X
\end{aligned}
$$

Condiciones necesarias de KTK para la optimalidad de (P).

Sea $\bar{\mathbf{x}} \in X$ una solución factible de (P), i.e., $g_i(\bar{\mathbf{x}}) \leq 0, i = 1, \dots, m$, y $h_j(\bar{\mathbf{x}}) = 0, j = 1, \dots, l$ y sea $I = \{i : g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$. Suponga que (P) cumple:

(1) Las funciones f, g_i y h_j son diferenciables en $\bar{\mathbf{x}}, i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, l$.

(2) Los vectores $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}), i \in I$, y $\nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) j = 1, \dots, l$ son linealmente independientes.

Bajo estas hipotesis, si $\bar{\mathbf{x}}$ es un óptimo local de (P), entonces

$$
\textbf{condiciones de KTK}
\begin{cases}
\text{existen escalares } \alpha_i \geq 0, i \in I, \text{ y } \beta_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, l\\
\text{tales que } \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} \alpha_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^{l} \beta_j \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},\\
\alpha_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0, i = 1, \dots, m\ (\alpha_i = 0, i \notin I)
\end{cases}
$$

Condiciones suficientes de KTK para la optimalidad de (P)

Sea $\bar{\mathbf{x}} \in X$ una solución factible de (P) que cumple las hipotesis (1) y (2) de la propiedad anterior y que $\bar{\mathbf{x}}$ satisface las condiciones de KTK, i.e., existen escalares $\alpha_i \geq 0, i \in I$, y $\beta_j \in \mathbb{R}$ tales que

$$
\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I} \alpha_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^{l} \beta_j \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \text{ y } \alpha_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0, i = 1, \dots, m
$$

Además, sean $J = \{j : \beta_j > 0\}$ y $K = \{j : \beta_j < 0\}$

Si las funciones $f, g_i, i \in I$ y $h_j, j \in J$ son **convexas** en $\bar{\mathbf{x}}$, y si las $h_j, j \in K$ son **concavas** en $\bar{\mathbf{x}}$, entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es un óptimo (local) de (P).

Observación: Si $\bar{\mathbf{x}}$ es una solución factible de (P), las condiciones de KTK asociadas a $\bar{\mathbf{x}}$, corresponden a determinar una solución factible del siguiente S.I.L.

$$
[P\ \ Q]\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{V}\end{pmatrix} = \mathbf{b}
$$

$$
\mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{V} \gtreqless \mathbf{0}
$$