Por lo tanto, si $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ es una solución del sistema definido por:

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{1}^{m} y_i \nabla g_i(\mathbf{x}) = 0; \;\; g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \ldots, m,$$

y si $\bar{\mathbf{x}}$ satisface las hipotesis (1) y (2) del Teorema de Lagrange, entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es un **candidato** a ser un óptimo (local) de f/S, i.e., de (P).

Condiciones suficientes para la optimalidad de (P): problemas con igualdades.

Las condiciones suficientes requieren que las funciones f y g_i sean de clase C^2 en una vecindad V de $\mathbf{x}$ lo que a su vez asegura que la funcion Lagrangiana L sea de clase C^2 en $V \times \mathbb{R}^m$. Por lo tanto, si A denota la matriz de $m \times n$ cuya fila i es $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$, entonces se tiene que

$$\nabla L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla g_i(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x}))$$

y

$$H_L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} H_f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i H_{g_i}(\mathbf{x}) & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

y si $Q = H_f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i H_{g_i}(\mathbf{x})$, y $P = H_L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ entonces para $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ resulta

$$(\mathbf{u} \; \mathbf{v})^T P \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \mathbf{u}^T Q \mathbf{u} + 2\mathbf{v}^T A \mathbf{u}$$

La siguiente propiedad establece las condiciones suficientes para la optimalidad de (P).

> **Prop.6.** Sean f y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^2 en una vecindad V de $\bar{\mathbf{x}}$, donde $\bar{\mathbf{x}} \in S = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \ldots, m\}$ y sea $U = \{u : \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{u} = 0,$
> $i = 1, \ldots, m\}$
> Si lo vectores $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$ son linealmente independientes, y si para algún $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$, el vector $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \in V \times \mathbb{R}^m$ es un punto crítico de L que satisface
>
> $$\mathbf{u}^T Q \mathbf{u} > 0, \text{ para todo } \mathbf{u} \in U,$$
>
> entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es un punto mínimo (local) de (P)
> La condición que establece la propiedad anterior significa que Q es definida positiva sobre el subespacio vectorial U.
> El siguiente resultado permite determinar lo anterior usando las matrices Q y A. Para esta caracterización se usa la siguiente notación: dada una matriz M se denota por M_{rs} la matriz formada por las primeras r filas y las primeras s columnas de M.