Condiciones suficientes para la optimalidad:

Prop.4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en $\bar{\mathbf{x}} \in$ Int (D_f). Si f cumple: $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ y $H_f(\bar{\mathbf{x}})$ es definido positivo (resp.negativo), entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es un punto mínimo (local) de f (resp. es un punto máximo (local) de f).

Nota. La condición suficiente de $2^{\underline{do}}$ orden puede ser reemplazada por la siguiente: Para alguna vecindad $V(\bar{\mathbf{x}})$, la matriz Hessiana $H_f(\mathbf{x})$ es definida semi-positiva para todo $\mathbf{x} \in V(\bar{\mathbf{x}})$ (resp. $H_f(\mathbf{x})$ es definida semi-negativa, para todo $\mathbf{x} \in V(\bar{\mathbf{x}})$).

II. **PROBLEMAS CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD**(Lagrange)
Sea (P) : Min $\{f(\mathbf{x}) : g(\mathbf{x})\ 0, i = 1, \ldots, m\}$, donde f y g_i son funciones (dadas) de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.
Al problema (P) se le asocia una función $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida por:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i g_i(\mathbf{x})$$

La función L se llama función **Lagrangeana** asociada a (P).

Condición necesaria para la optimalidad de (P)

Prop.5. (**Teorema de Lagrange**). Sean f y $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones con dominio común D y sea $\bar{\mathbf{x}} \in S = \{\mathbf{x} : g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \ldots, m\}$ tales que:

(1) f y g_i son de clase C^1 en una vecindad $V(\bar{\mathbf{x}}), i = 1, \ldots, m$.
(2) los vectores $\nabla g_i(\bar{x})$ son **linealmente independientes**, $i = 1, \ldots, m$.
(3) $\bar{\mathbf{x}}$ es un optimo (local) de f en $S \cap V(\bar{\mathbf{x}})$.
Entonces, existe $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\nabla L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$.

Nota. La condición necesaria que establece esta propiedad significa que $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ es un **punto crítico** de la función Lagrangeana L asociada a (P), y por la definición de L, es equivalente a:

$$\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \text{ y } g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0, i = 1, \ldots, m,$$

i.e., el Teorema asegura que el vector $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$ es combinación lineal de los $\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})$$

donde $\lambda_i = -\bar{y}_i, i = 1, \ldots, m$ son los llamados **multiplicadores de Lagrange**.