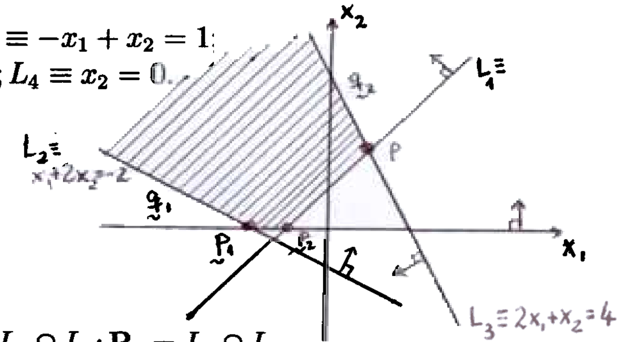
P2.

(i) $S = \{(x_1, x_2) : -x_1 + x_2 \geq 1, x_1 + 2x_2 \geq -2, 2x_1 + x_2 \leq 4, x_2 \geq 0\}$

Grafico de S. Se grafican las rectas: $L_1 \equiv -x_1 + x_2 = 1$; $L_2 \equiv x_1 + 2x_2 = -2$ y $L_3 \equiv 2x_1 + x_2 = 4$; $L_4 \equiv x_2 = 0$.



(1.5) (con la normal a cada recta se determina el semiplano correspondiente a la desigualdad asociada a la recta: $S \equiv$ la intersección de tales semiplanos

Puntos extremos: $\mathbf{P}_1 = L_2 \cap L_4; \mathbf{P}_2 = L_1 \cap L_4; \mathbf{P}_3 = L_1 \cap L_3.$

(0.7) $\mathbf{P}_1 \equiv \begin{cases} x_1 + 2x_2 & = -2 \\ x_2 & = 0 \end{cases}; \mathbf{P}_2 \equiv \begin{cases} -x_1 + x_2 & = 1 \\ x_2 & = 0 \end{cases}; \mathbf{P}_3 \equiv \begin{cases} -x_1 + x_2 & = 1 \\ 2x_1 + x_2 & = 4 \end{cases}$

La solución de estos sistemas implica:

$$\mathbf{P}_1 = (-2, 0); \mathbf{P}_2 = (-1, 0); P_3 = (1, 2)$$

(0.8)

Direcciones extremas:

$\mathbf{d}_1$: dirección del rayo $\mathbf{q}_1$ (recta: $x_1 + 2x_2 = -2$).
$\mathbf{d}_2$: dirección del rayo $\mathbf{q}_2$ (recta: $2x_1 + x_2 = 4$).
$\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1 + \alpha \mathbf{d}_1$ y $\mathbf{q}_2 = \mathbf{p}_3 + \alpha \mathbf{d}_2$ son los **rayos extremos.**

Obtención de $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$

- Para $\mathbf{d}_1$: Como (1,2) es la normal a la recta L_2, $\mathbf{d}_2$ se elige tal que $(1, 2) - \mathbf{d}_2 = 0$, y $\mathbf{d}_2 \neq (0, 0)$, por ejemplo: $\mathbf{d}_2 = (-2, 1)$ (notar que (2,-1) no sirve).
- Para $\mathbf{d}_2$: Como (2,1) es la normal a la recta $L_3, \mathbf{d}_2$ se elige similarmente, e.g., $\mathbf{d}_2 = (-1, 2)$.

Otra manera: Se consideran puntos $\mathbf{p}'_1 \in \mathbf{q}_1$ y $\mathbf{p}'_3 \in \mathbf{q}_2$ y los vectores $\mathbf{d}_1 = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1$ y $\mathbf{d}_2 = \mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_3$ definen direcciones extremas de S, por ejemplo , $\mathbf{p}'_1 = (-4, 1)$ y $\mathbf{p}'_3 = (0, 4)$, con los cuales, resulta:
$\mathbf{d}_1 = (-4, 1) - (2, 0) = (-2, 1)$ y $\mathbf{d}_2 = (0, 4) - (1, 2) = (-1, 2)$
$\Rightarrow \boxed{\mathbf{d}_1 = (-2, 1) \text{ y } \mathbf{d}_2 = (-1, 2)}$