Tarea 2, MA36 A Funciones de Variable Compleja

Prof: Salomé Martínez
Aux: Juan Peypouquet

1. En este ejercicio probaremos el Teorema de Weierstrass de descomposición en producto infinito a partir de la descomposición de una función meromorfa en fracciones parciales.

   (a) Sea a_n una secuencia en $\mathbb{C}$, con $|a_n| \to \infty$, $a_n \neq 0$ para todo n. Demuestre que existe una secuencia de enteros k_n tal que:

   $$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) + \ldots + \frac{1}{a_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{k_n - 1} \right)$$

   es una función meromorfa con polos simples en a_n para todo n.

   (b) Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ demuestre que si γ_1 y γ_2 son dos curvas suaves en $\mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de 0 a z entonces

   $$\int_{\gamma_1} h - \int_{\gamma_2} h = 2\pi i m,$$

   con m entero.

   (c) Pruebe que si γ es cualquier curva suave en $\mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de 0 a z entonces:

   $$f(z) = e^{\int_\gamma h},$$

   define una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

   (d) Pruebe que si $z \in \{a_1, a_2, \ldots\}$ entonces z es una singularidad removible de f, más aún $f(z) = 0$ y la multiplicidad de z es igual al número de veces que z está repetido en la secuencia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

   (e) Pruebe que:

   $$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left(\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n} \right)^2 + \ldots + \frac{1}{k_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^k_n \right).$$

2. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ con $|a_n| \to \infty$ y A_n una secuencia de números complejos. Pruebe que existe una función f analítica en $\mathbb{C}$ que satisface $f(a_n) = A_n$. *Hint: Sea g una función con ceros simples en $\{a_n\}$. Demuestre que:*

   $$\sum_{n=1}^{\infty} g(z) \frac{e^{\gamma_n (z - a_n)}}{z - a_n} \frac{A_n}{g'(a_n)},$$

   converge para una elección apropiada de γ_n.

3. Pruebe las siguientes expansiones:
   (a) $\cos(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right)$.
   (b) $\sin \pi(z+\alpha) = e^{\pi z \cot \pi\alpha} \prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n+\alpha}\right) e^{-\frac{z}{n+\alpha}}$.
   (c) $\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}$.
   (d) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.
   (e) Para $|z| < 1$
   $$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + z^{2n}\right) = \frac{1}{1-z}.$$
   (f) $\frac{\pi}{\sin \pi z} = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{(-1)^n}{z-n}$.
4. Pruebe la siguiente fórmula para la función Γ:
$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(z) = n^{z-\frac{1}{2}} \prod_{l=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{z+l}{n}\right).$$
5. Verifique que:
$$\int_0^\infty \sin(t^2)dt = \int_0^\infty \cos(t^2)dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\pi}.$$
6. Sea $\eta(z) = z(z-1)\pi^{-\frac{z}{2}}\zeta(z)\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)$. Demuestre que η es analítica en $\mathbb{C}$ y demuestre que $\eta(z) = \eta(1-z)$.
7. Para los siguientes problemas considere que las fórmulas valen para $Re\, z > A$ con $A > 1$ apropiado en cada caso:
   (a) Pruebe que:
   $$\zeta^2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^z},$$
   con $d(n)$ es el número de divisores de n.
   (b) Pruebe que
   $$\zeta(z)\zeta(z-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^z}$$
   donde $\sigma(n)$ es la suma de los divisores de n.
   (c) Pruebe que
   $$\frac{\zeta(z-1)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^z}$$
   donde $\phi(n)$ es el número de enteros menores que n que son relativamente primos a n.