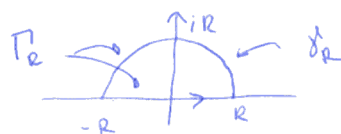


(5) Como  $1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$  y  $n$  es par, el denominador no tiene polos en  $\mathbb{R}$  y su grado excede en  $n \geq 2$  al del numerador. Utilizando, como otras veces el contorno  $\Gamma_R$  con  $R > 1$  para incluir a todas las raíces  $(n+1)$ -ésimas de la unidad en el semiplano superior.



$$\text{Así, } \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z+\dots+z^n} = \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x+\dots+x^n} + \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z+\dots+z^n}.$$

Cuando  $R \rightarrow \infty$ ,  $\left| \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z+\dots+z^n} \right| \sim \frac{1}{R^{n-1}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ , entonces

$$\text{que } \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x+\dots+x^n} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x+\dots+x^n}. \quad \text{El lado izquierdo}$$

permanece igual a  $2\pi i \sum \text{Res} \left( \frac{1}{1+z+\dots+z^n}, \omega_k \right)$ , donde la

suma se toma sobre las raíces de la unidad con parte imaginaria positiva. es decir,  $\omega_k = e^{\frac{2\pi i k}{n+1}}$   $k=1, \dots, \frac{n}{2}$ .

$$\begin{aligned} \text{Así, } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x+\dots+x^n} &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n/2} \text{Res} \left( \frac{z-1}{z^{n+1}-1}, \omega_k \right) \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n/2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n/2} (z_k - z_j)^{-1}. \end{aligned}$$

