

El Teorema de Rouché nos dice que $z-w$ y $[f(z)-w+w-z+(z-w)]$,
 es decir, $f(z)-w$, tienen el mismo número de ceros en
 $D(0, \frac{1}{M+1})$. Como $z-w$ tiene exactamente un cero en ese
 disco, la ecuación $f(z)=w$ tiene exactamente una solución allí. ■

(3) (a) $\frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{z} \sum_{n \geq 1} n z^{n-1} = \sum_{n \geq 1} n z^{n-2}$ con desarrollo
 válido en $0 < |z| < 1$.

(b) $\frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{n \geq 0} (-1)^n (z-1)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (z-1)^{n-2}$, con
 desarrollo válido en $0 < |z-1| < 1$.

(c) Observemos que el desarrollo $\frac{1}{1-1/z} = \sum_{n \geq 1} (1/z)^n$ es válido en

$|1/z| < 1$, es decir, en $|z| > 1$. Por otra parte,

$$\frac{1}{1-1/z} = \frac{z}{z-1} = -z \cdot \frac{1}{1-z}, \text{ de donde } \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z}. \text{ Así,}$$

en $|z| > 1$, $\frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{z} \left(-\frac{1}{z}\right)^2 \left(\frac{1}{1-1/z}\right)^2 = \frac{1}{z^3} \sum_{n \geq 1} n z^{-(n-1)} = \sum_{n \geq 1} n z^{-n-2}$. ■

(4) (a) Por simplicidad $\varphi(z) = [\log(z)]^2 \frac{P(z)}{Q(z)}$.

$$\int_{C_1} \varphi + \int_{C_2} \varphi + \int_{I_1} \varphi + \int_{I_2} \varphi = \int_{K_{\varepsilon, R}} \varphi = 2\pi i \sum_{Q(w)=0} \operatorname{Res}(\varphi(z), w).$$

* $\left| \int_{C_1} \varphi(z) dz \right| \sim \frac{(\ln R)^2}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$

* $\left| \int_{C_2} \varphi(z) dz \right| \sim \varepsilon (\ln \varepsilon)^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$