

### PAUTA. CONTROL III.

(1) En  $\gamma$ ,  $f+g = f(1+g/f)$  (pues  $|f| > |g| \Rightarrow f \neq 0$  en  $\gamma$ )

luego  $\frac{(f+g)'}{f+g} = \frac{f'}{f} + \frac{(1+g/f)'}{1+g/f}$ , de modo que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f+g)'}{f+g} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1+g/f)'}{1+g/f} \quad \text{y así}$$

$$Z(f+g) = Z(f) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1+g/f)'}{1+g/f}. \quad \text{en la última integral}$$

hacemos el cambio  $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$  y obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1+g/f)'}{1+g/f} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w} dw, \quad \text{donde } \Gamma \text{ es la imagen de } \gamma$$

por la transformación  $w = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ . Como  $|\frac{g(z)}{f(z)}| < 1$  en  $\gamma$ ,

$$\left| 1 - \left( 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) \right| = \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1 \quad \text{y así } \Gamma \subset D(1,1) \text{ por lo cual}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w} dw = 0 \quad \text{y obtenemos el resultado.} \quad \blacksquare$$

(2) (a) Definimos  $F(z) = \frac{f'(z)-1}{M+1}$ . Tenemos que  $F(0)=0$ ,  $F$  es analítica

en  $D(0,1)$  y  $|F(z)| \leq \frac{|f'(z)|+1}{M+1} \leq 1$  en  $D(0,1)$ . El lema

de Schwarz nos dice que  $|F(z)| \leq |z|$  en  $D(0,1)$ . es decir,

$$|f'(z)-1| \leq (M+1)|z|.$$

(b) Observemos que  $\forall w \in D(0, \frac{1}{2(M+1)})$  y  $\forall z \in \partial D(0, \frac{1}{M+1})$ ,

$$|z-w| \geq \frac{1}{M+1} - |w| > \frac{1}{2(M+1)}, \quad \text{mientras que}$$

$$\begin{aligned} |f(z) \cdot w + w - z| &= |f(z) - z| = \left| \int_0^z [f'(\xi) - 1] d\xi \right| \leq \int_0^z |f'(\xi) - 1| d\xi \\ &\leq (M+1) \int_0^z |\xi| d\xi = \frac{(M+1)|z|^2}{2} = \frac{1}{2(M+1)} \end{aligned}$$