

Guia 1, MA36 A Funciones de Variable Compleja

Prof: Salomé Martínez

Aux: Juan Peypouquet

1. Pruebe que $3z^5 - e^z$ tiene al menos cinco soluciones en \mathbb{C} (contando su multiplicidad).
2. Pruebe que todas las raíces de $z^7 - 5z^3 + 12$ están en $1 < |z| < 2$.
3. Pruebe que una singularidad aislada de f no puede ser un polo de e^f .
4. Considere

$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$$

- (a) Describa las singularidades de f y calcule los residuos correspondientes a las singularidades aisladas.
- (b) Calcule

$$\int_{|z|=1} f(z) dz,$$

con $|z| = 1$ orientado en el sentido antihorario. Hint: Use el cambio de variables $w = 1/z$.

5. Calcule la serie de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

que converge en $|z| > 1$.

6. Calcule la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(x+3)\sqrt{x^2-1}} dx$$

7. Calcule

$$S(x) = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt$$

donde $x \in \mathbb{R}$.

8. Calcule

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{kx}}{1+e^x} dx$$

donde $0 < k < 1$.

9. Suponga que f es analítica en un disco $D(z_0, r)/\{z_0\}$. Pruebe que si

$$\int_{D(z_0, r)} |f(z)|^2 dx dy < \infty$$

entonces la singularidad es removible. Se puede concluir lo mismo si sabemos que

$$\int_{D(z_0, r)} |f(z)| dx dy < \infty?$$

10. Considere

$$f(z) = \frac{1}{z^2(e^z + 1)}.$$

Encuentre todos los polos de f y calcule los correspondientes residuos.

11. Pruebe la identidad

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n)^2}.$$

12. Pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\theta}{n^3} = \frac{\theta(\pi - \theta)(\pi + \theta)}{12},$$

para $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

13. Calcule

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} f(x) dx + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} f(x) dx$$

donde $f(x) = \frac{x^{-p}}{x-1}$ y $0 < p < 1$.

14. Calcule las siguientes integrales reales (interpretando como valor principal si corresponde):

(a) $\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{1+x^2} dx$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{a^2 - x^2} dx$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1} dx$ con $0 < a < 1$.

(d) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

(e) $\int_0^{\pi/2} \frac{a}{a^2 + \sin^2 \theta} d\theta$

(f) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$ (Hint: Use como camino un sector circular de ángulo $2\pi/n$).

15. Sea f analítica en \mathbb{C} excepto por un número finito de singularidades. Definimos el residuo de f en infinito como:

$$\text{res}_{\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) dz,$$

donde R es tal que todas las singularidades de f están en $|z| < R$.

- (a) Interprete la definición.
- (b) Demuestre que $\operatorname{res}_\infty f(z)$ está bien definido.
- (c) Demuestre que la suma de todos los residuos de f es 0.
- (d) ¿Qué pasa si definimos $\operatorname{res}_\infty f(z)$ como el residuo en 0 de $\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$?