P6)

(i) $W = k\left(\frac{z+a}{z+b}\right)$ $\quad k \neq 0$

Punto fijo $\quad z(z+b) = kz + ak$

$$z^2 + (b-k)z - ak = 0$$

tiene una sola raíz cuando $\quad (b-k)^2 + 4ak = 0$

a) $a = 0 \Rightarrow b = k$

$$w = \frac{kz}{z+k}$$ En este caso el punto fijo es $z = 0$

$$\frac{z+k}{kz} = \frac{1}{w} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{z} = \frac{1}{w}$$

b) $a \neq 0 \Rightarrow \quad a = -\frac{(b-k)^2}{4k}$

En este caso $\quad z = -\left(\frac{b-k}{2}\right)$ es el punto fijo

$$w + \frac{b-k}{2} = \frac{kz - \frac{(b-k)^2}{4}}{z+b} + \frac{b-k}{2} = \frac{kz - \left(\frac{b-k}{4}\right)^2 + z\left(\frac{b-k}{2}\right) + b\left(\frac{b-k}{2}\right)}{z+b}$$

$$= \frac{z\left(\frac{b+k}{2}\right) + \left(\frac{b-k}{2}\right)\left(b - \left(\frac{b-k}{2}\right)\right)}{z+b}$$

$$\underbrace{\phantom{b-\left(\frac{b-k}{2}\right)}}_{\frac{b+k}{2}}$$

$\therefore \quad w + \frac{(b-k)}{2} = \left(\frac{b+k}{2}\right)\left[\frac{z + \left(\frac{b-k}{2}\right)}{z+b}\right] \qquad \left(\frac{b+k}{2}\right) \neq 0$

$$\frac{1}{w - \left(\frac{b-k}{2}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{b+k}{2}\right)} \frac{(z+b)}{\left(z + \frac{b-k}{2}\right)} = \frac{1}{z + \frac{b-k}{2}} + \frac{1}{\frac{b+k}{2}}$$ ⊠

(ii) Usando razón cruzada

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} : \frac{w_3 - w_4}{w_2 - w_4} = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4}$$

Si hay 2 ptos fijos z_2, z_3 $\Rightarrow$ $w_2 = z_2$, $w_3 = z_3$

$\therefore$

$$\frac{w - z_2}{w - z_3} = a\,\frac{z - z_2}{z - z_3} \qquad k \in \mathbb{C}$$

(iii) $\quad (w - z_2)(z - z_3) = a\,(w - z_3)(z - z_2)$

Derivando

$$L'(z_2)(z_2 - z_3) = a\,(z_2 - z_3)$$

$$(z_3 - z_2) = a\,L'(z_3)(z_3 - z_2)$$

$$\Rightarrow \cancel{a}\,L'(z_3)\cancel{(z_3 - z_2)}\,L'(z_2)\cancel{(z_2 - z_3)} = \cancel{a}\,\cancel{(z_2 - z_3)}\cancel{(z_3 - z_2)}$$

$$\Rightarrow L'(z_3)\,L'(z_2) = 1.$$ ⊠