

**PROBLEMA 1**

- 1.1 Notemos que  $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$ . Se puede entonces tomar  $\bar{Z}$  para estimar a  $\mu_X + \mu_Y$ . Pero  $Var(Z) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$ . No se puede tomar  $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$  como varianza de  $Z$ . Habría que usar la covarianza.
- 1.2 Si el estimador  $\hat{\theta}$  es insesgado, es posible que no sea de varianza mínima. No todos los estimadores insesgados tienen una varianza que alcanza la cota inferior de CRAMER-RAO. Se puede encontrar un estimador sesgado pero más eficiente que un estimador insesgado, basta que el error cuadrático medio sea menor.
- 1.3 Si el nivel de confianza crece de 90% a 95% el largo del intervalo será más grande.
- 1.4 Si el tamaño de la muestra crece y se fija el nivel de confianza, el largo del intervalo será más pequeño.

**PROBLEMA 2**

$$2.1 \quad E(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{2}E(\bar{X}) + \frac{1}{2}E(\bar{Y}) = \mu.$$

Dado que las muestras son independientes

$$Var(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{4}Var(\bar{X}) + \frac{1}{4}Var(\bar{Y}) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\sigma^2.$$

$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}\bar{X} + \frac{1}{2}\bar{Y}$  es insesgado, de varianza que converge a 0 cuando  $n$  y/o  $m$  tienden a infinito. Es consistente.

$$2.2 \text{ Sea } \hat{\mu}_a = a\bar{X} + (1-a)\bar{Y} \text{ en donde } 0 \leq a \leq 1.$$

$$Var(\hat{\mu}_a) = a^2Var(\bar{X}) + (1-a)^2Var(\bar{Y}) = \left[\frac{a^2}{n} + \frac{(1-a)^2}{m}\right]\sigma^2.$$

Se obtiene un mínimo para  $a = \frac{n}{n+m}$ .

Se puede concluir que si  $n \neq m$  el estimador insesgado  $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}\bar{X} + \frac{1}{2}\bar{Y}$  no es de mínima varianza.

- 2.3 El estimador  $\hat{\mu}_2$  de máxima verosimilitud es igual a  $\hat{\mu}_2 = \frac{n\bar{X} + m\bar{Y}}{n+m}$  que es la solución óptima de 2.2.  $E(\hat{\mu}_2) = \mu$ .  $Var(\hat{\mu}_2) = \frac{\sigma^2}{n+m}$ . Se prefiere  $\hat{\mu}_2$  ya que es insesgado y tiene menos varianza que  $\hat{\mu}_1$ .

$$2.4 \quad \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2, \quad \frac{mT^2}{\sigma^2} \sim \chi_{m-1}^2 \text{ y } \frac{(n+m-2)\sigma^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n+m-2}^2.$$

**PROBLEMA 3**

- 3.1 Un intervalo de confianza para  $\lambda$  utilizando  $y = \sum_{i=1}^{30} x_i$  equivale a encontrar  $a$  y  $b$  tales que  $P(a \leq \lambda \leq b) = 1 - \alpha = 0.95$

Para utilizar el Teorema central del límite calculamos

$$E(y) = E\left(\sum x_i\right) = nE(x_i) = \frac{n}{\lambda} \quad \text{y la } Var(y) = \frac{n}{\lambda^2}$$

$$\text{Luego } z = \frac{y - E(y)}{\sqrt{Var(y)}} = \frac{y - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \longrightarrow N(0,1)$$

$$\Rightarrow P(a \leq \lambda \leq b) = P\left(\frac{1}{b} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{a}\right) = P\left(\frac{y - \frac{n}{b}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \leq \frac{y - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} \leq \frac{y - \frac{n}{a}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}}\right) = P(-z_1 \leq z \leq z_1) = 0.95$$

$$z_1 = 1,96 \Rightarrow P\left(\left|\frac{y - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}}\right| \leq 1,96\right) \text{ Luego desarrollamos la ecuación cuadrática asociada.}$$

$$\left|\frac{y - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}}\right| \leq 1,96 \Rightarrow \frac{(y^2 - 2\frac{ny}{\lambda} + \frac{n^2}{\lambda^2})}{\frac{n}{\lambda^2}} \leq 3,8416 \text{ Desarrollando la ecuación de segundo}$$

grado quedaría cómo:  $y^2 \lambda^2 - 2ny\lambda + n^2 - 3,8416n \leq 0$  desarrollando para la igualdad para  $n=30$  e  $y=150$  años.

$$\lambda = \frac{n}{y} \pm \frac{z}{y} \sqrt{n} \Rightarrow P(0,12843 \leq \lambda \leq 0,27157) = 0,95$$

3.2 Utilizando la función generatriz de los momentos:

$$\varphi_Y(t) = E(e^Y) = E(e^{\sum x_i}) = E(e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{x_3} \dots e^{x_n}) = E(e^{x_1}) \dots E(e^{x_n}) = [E(e^X)]^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

$$E(e^{2\lambda Y}) = \varphi_Y(2\lambda t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - 2\lambda t}\right)^n = \left(\frac{1}{1 - 2t}\right)^n \text{ que es la función generatriz de los momentos de la } \chi_{2n}^2.$$

3.3  $P(L \leq T \leq U) = 0,95$  La distribución de T ya es conocida por lo que solo se necesita calcular los valores para L y U.

$T \longrightarrow \chi_{2n}^2$  tomando colas equiprobables  $\alpha/2$ .

$$P(T \leq L) = 0.025 \quad \text{y} \quad P(T \geq U) = 0.025 \quad \text{Luego } L = 40,482 \quad \text{y} \quad U = 83,298$$

$$\text{Luego } \frac{L}{2y} = 0,13494 \quad \text{y} \quad \frac{U}{2y} = 0,27766 \Rightarrow P(0,13494 \leq \lambda \leq 0,27766) = 0,95$$

3.4 Prefiero este intervalo pues el del punto 3.1 depende del parámetro n.