



MA34B - Estadística

Teoría de decisiones múltiples

Prof. Rodrigo Abt

`rabt@dim.uchile.cl`



Introducción

Problema: Un agricultor puede plantar papas o tomates. Si planta papas y llueve, el agricultor gana solo \$600.000, pero si no llueve gana \$1.800.000. En cambio, si planta tomates y llueve, gana \$1.200.000, pero si no llueve, gana solo \$800.000. ¿Qué le conviene plantar al agricultor?. Para analizar el problema, debemos identificar los elementos del mismo. En primer lugar tenemos:

- Dos acciones: sembrar papas o sembrar tomates.
- El clima: llueve o no llueve.
- Los pagos asociados a las combinaciones de ambos elementos

Lo cual se puede resumir en el siguiente cuadro:

	P	T
LL	600	1.200
N-LL	1.800	800

Siendo P: plantar papas, T: plantar tomates, LL: llueve y N-LL: no llueve. (Pagos en miles de pesos).



¿Cómo decidir?

- Para que el agricultor decida, debe contar con un criterio o regla, que basándose en la información disponible, le permita obtener el mejor resultado. En este caso, el agricultor busca ganar el mayor beneficio con la venta.
- Cuando NO existe incertidumbre, la selección de un criterio puede obedecer a la actitud frente al riesgo que presenten los tomadores de decisión. Algunos de estos criterios son: Maximax (para optimistas), Maximin (para pesimistas o conservadores), Minimax (para oportunistas), Hurcwiz y Laplace.
- Sin embargo, la mayoría de las veces, los eventos de la naturaleza tienen un grado de incertidumbre, el que puede traducirse en la especificación de una distribución de probabilidad de ocurrencia de los mismos. Esta distribución puede basarse en la historia, antecedentes previos o incluso en las propias creencias del investigador.
- En este caso las decisiones deben incorporar el efecto de la incertidumbre presente en los diferentes eventos de la naturaleza.



Elementos adicionales

- ¿Cómo decidiría el agricultor si un informe del tiempo le revela que la probabilidad de lluvia es de 0.75?
- La alternativa utilizada en este caso es la del *mayor beneficio esperado* o *menor riesgo esperado* (dependiendo del contexto del problema).
- El beneficio esperado del agricultor para la decisión de plantar papas es:
 $600 \cdot 0,75 + 1800 \cdot 0,25 = 450 + 450 = 900$.
- Para la decisión de plantar tomates en cambio, el beneficio esperado es:
 $1200 \cdot 0,75 + 800 \cdot 0,25 = 900 + 200 = 1100$
- El mayor beneficio esperado al plantar tomates nos indica que es la decisión adecuada.



La Teoría

Podemos generalizar este tipo de problemas, identificando los siguientes elementos:

- Se tiene un conjunto de **decisiones** o acciones $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$
- Existe un conjunto de **estados** de la naturaleza $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$, y una ley de probabilidades *a priori* $\xi(\theta)$ asociada a cada evento.
- Una **función de pérdida** o costo $L : D \times \Theta \rightarrow [0, \infty)$ para cada combinación decisión-estado.

La información de estos elementos se pueden resumir en una **Matriz o Tabla de pagos**

Nota: Dependiendo del contexto del problema, y del uso de signos, la función de pérdida puede reflejar pagos, beneficios o utilidades.



Riesgo esperado

- Para cada decisión d_j , se puede calcular el **riesgo esperado** como:

$$\rho_j = E[L(d_j, \theta)] = \int_{\Omega} L(d_j, \theta) \xi(\theta) d\theta$$

- Se elige aquella decisión d_l que minimiza el riesgo esperado:

$$\rho_l = \min_j \rho_j$$

A dicha decisión se le denomina **Decisión Bayes**.

- Una decisión d se dirá inadmisibles si existe una decisión d^* tal que

$$L(d^*, \theta) \leq L(d, \theta) \quad \forall \theta$$

- Cuando existen decisiones inadmisibles, estas deberán descartarse antes de llevar a cabo cualquier análisis.



Información muestral

- Supongamos que nuestro agricultor cuenta con la opinión de una persona "experta" en meteorología. Sin embargo, dicho experto puede equivocarse; de hecho, de 10 veces que ha llovido, sólo 2 veces ha predicho lo contrario, y cuando no ha llovido, en 4 oportunidades predijo lo contrario, como lo refleja el siguiente cuadro:

	Predijo lluvia	No predijo lluvia
Llovió	8	2
No llovió	4	6

- ¿Cómo influye esta información en la toma de decisiones?

Información muestral (2)

- La información provista por el experto se puede describir a través de una variable aleatoria X :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el experto predice lluvia} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- Si $\theta = 1$ representa el evento "Llueve", y $\theta = 0$ representa "No llueve", entonces se puede escribir:

$$\begin{aligned} P(X = 1|\theta = 1) &= \frac{8}{10} & P(X = 0|\theta = 1) &= \frac{2}{10} \\ P(X = 1|\theta = 0) &= \frac{4}{10} & P(X = 0|\theta = 0) &= \frac{6}{10} \end{aligned}$$



El Teorema de Bayes

- Claramente la información provista por el experto nos puede hacer dudar de las probabilidades a priori especificadas para los eventos "Llueve" y "No llueve". ¿Existe alguna forma de "actualizar" dichas probabilidades?. La respuesta es sí, gracias a un famoso teorema visto en cursos de Probabilidades: El Teorema de Bayes
- El Teorema de Bayes establece que dado un conjunto de sucesos elementales (partición) $\{B_j\}_j$ tales que $\bigcap_{j=1}^N B_j = \emptyset$, y un suceso A , tal que se conocen las probabilidades condicionales $P(A|B_j)$, entonces:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^N P(A|B_i)P(B_i)}$$



Probabilidades a posteriori

- De manera general, el aporte de información muestral se puede representar a través de una m.a.s. X_1, X_2, \dots, X_n con una ley de probabilidades $f(x|\theta)$, donde θ es el parámetro que representa los estados de la naturaleza, y X corresponde a la variable que describe la información.
- Para actualizar la probabilidades a priori de θ podemos usar el Teorema de Bayes. Si suponemos que X es discreta:

$$\xi(\theta|X) = \frac{f_n(X_1, X_2, \dots, X_n|\theta)\xi(\theta)}{\sum_{\theta} f_n(X_1, X_2, \dots, X_n|\theta)\xi(\theta)}$$

Riesgo a posteriori

- Veamos como cambia la distribución a priori de los eventos para el caso del agricultor, para cada posible predicción del "experto".

$$\xi(\theta = 1|X = 1) = \frac{P(X = 1|\theta = 1)P(\theta = 1)}{P(X = 1|\theta = 1)P(\theta = 1) + P(X = 1|\theta = 0)P(\theta = 0)} = \frac{0,8 \cdot 0,75}{0,8 \cdot 0,75 + 0,4 \cdot 0,25} \approx 0,86$$

$$\xi(\theta = 0|X = 1) = 1 - 0,86 = 0,14$$

$$\xi(\theta = 1|X = 0) = \frac{P(X = 0|\theta = 1)P(\theta = 1)}{P(X = 0|\theta = 1)P(\theta = 1) + P(X = 0|\theta = 0)P(\theta = 0)} = \frac{0,2 \cdot 0,75}{0,2 \cdot 0,75 + 0,6 \cdot 0,25} = 0,5$$

$$\xi(\theta = 0|X = 1) = 1 - 0,5 = 0,5$$



Riesgo a posteriori(2)

- Dada la credibilidad de nuestro "experto", las probabilidades de los estados se "ajustan" de acuerdo a sus predicciones. Vemos que, como el "experto" no se equivoca demasiado al predecir lluvia, nuestra probabilidad *a priori* aumenta de 0.75 a 0.86 si este último predice "Lluvia".
- A su vez, como el "experto" es más impreciso cuando no llueve, podemos observar que las probabilidades a priori se equilibran ambas en 0.5
- Dadas estas nuevas probabilidades, ¿cuál es la decisión del agricultor?. Bueno, esta dependerá de la predicción:

Riesgo a posteriori(3)

- Si $X = 1$ entonces el riesgo esperado para las decisiones d_1, d_2 (plantar papas y tomates respectivamente) es:

$$\rho_1(X = 1) = E[L(d_1, \theta | X = 1)] = \sum_{i=0,1} L(d_1, \theta = i) \xi(\theta = i | X = 1) =$$

$$600 \cdot 0,86 + 1800 \cdot 0,14 = 768$$

$$\rho_2(X = 1) = E[L(d_2, \theta | X = 1)] = \sum_{i=0,1} L(d_2, \theta = i) \xi(\theta = i | X = 1) =$$

$$1200 \cdot 0,86 + 800 \cdot 0,14 = 1120$$

- La decisión Bayes es plantar tomates.

Riesgo a posteriori(4)

- Si $X = 0$ entonces el riesgo esperado para las decisiones d_1, d_2 (plantar papas y tomates respectivamente) es:

$$\rho_1(X = 0) = E[L(d_1, \theta | X = 0)] = \sum_{i=0,1} L(d_1, \theta = i) \xi(\theta = i | X = 0) =$$

$$600 \cdot 0,5 + 1800 \cdot 0,5 = 1200$$

$$\rho_2(X = 0) = E[L(d_2, \theta | X = 0)] = \sum_{i=0,1} L(d_2, \theta = i) \xi(\theta = i | X = 0) =$$

$$1200 \cdot 0,5 + 800 \cdot 0,5 = 1000$$

- La decisión Bayes es plantar papas.

Regla de decisión

- Podemos entonces construir una regla de decisión óptima $\delta : X \rightarrow D$ para cada posible predicción del experto:

$$\delta(X) = \begin{cases} d_2 & \text{si } X = 1 \\ d_1 & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

- Podemos, además, calcular el riesgo global de usar esta última regla de decisión:

$$\begin{aligned} \rho(\delta) &= \sum_i \sum_j L(d_j, \theta_i) P(X = X(d_j) | \theta_i) \xi(\theta_i) \\ &= L(d_1, \theta = 1) P(X = 0 | \theta = 1) \xi(\theta = 1) + L(d_1, \theta = 0) P(X = 0 | \theta = 0) \xi(\theta = 0) + \\ &\quad L(d_2, \theta = 1) P(X = 1 | \theta = 1) \xi(\theta = 1) + L(d_2, \theta = 1) P(X = 1 | \theta = 0) \xi(\theta = 0) = \\ &\quad 600 \cdot 0,2 \cdot 0,75 + 1800 \cdot 0,6 \cdot 0,25 + 1200 \cdot 0,8 \cdot 0,75 + 800 \cdot 0,4 \cdot 0,25 = \\ &\quad 1160 \end{aligned}$$



El Valor de la Información

- No hemos considerado hasta este punto el costo de obtener información muestral. ¿Qué pasaría si el experto cobrase \$100.000 por decir la respuesta?
- El costo de la información se puede incluir en la matriz de pagos. Pero, ¿es posible saber hasta cuanto pagar por tener información especial?. La respuesta en general es si, y se puede obtener comparando el riesgo a priori con el riesgo de la política de decisiones δ .
- El Valor de la Información (VI) es entonces:

$$VI = \begin{cases} \rho(\delta) - \rho_{priori} & \text{si se trabaja con beneficios} \\ \rho_{priori} - \rho(\delta) & \text{si se trabaja con costos o pérdidas} \end{cases}$$

- En el caso del agricultor, $VI = 1160 - 1100 = 60$. Es decir, estamos dispuestos a pagar \$60.000 por la opinión del experto.