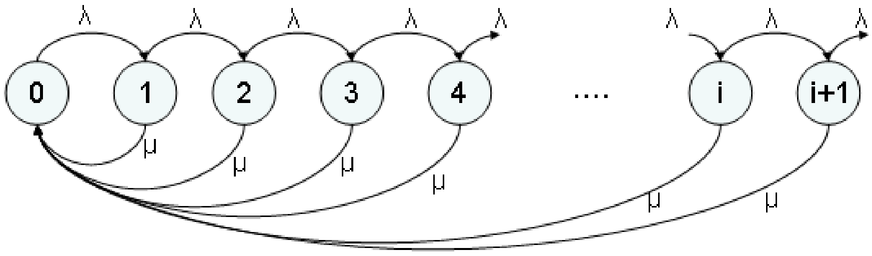
Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: Pablo Rey, Ariel Schilkrut
Aux : J. Guajardo, P. Hernández, J. Muñoz.

Solución Clase Auxiliar 04 de Noviembre, 2003

Problema 1

1. Definiendo los estados como el número de ofertas que tiene Tom Bollinery sobre su escritorio en un instante cualquiera, la cadena queda como sigue:



En esta situación, lo único que hay que imponer para que exista régimen estacionario es que $\mu > 0$, porque siempre eventualmente el sistema se vaciará.

Aplicando conservación se flujo se tiene que las ecuaciones para calular las probabilidades estacionarias son :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \pi_0 &= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \cdot \mu & (1) \\ (\lambda + \mu) \cdot \pi_1 &= \pi_0 \cdot \lambda & (2) \\ (\lambda + \mu) \cdot \pi_i &= \pi_{i-1} \cdot \lambda \quad \forall\, i \geq 2 & (3) \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i &= 1 & (4) \end{aligned}$$

De las ecuacion (4) se tiene que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = (1 - \pi_0)$$

reemplazando en (1) :

$$\lambda \cdot \pi_0 = (1 - \pi_0) \cdot \mu \Longrightarrow \pi_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Reemplazando π_0 en la ecuación (2) se obtiene:

$$\pi_1 = \frac{\lambda \cdot \mu}{(\lambda + \mu)^2}$$

Finalmente:

$$\pi_i = (\frac{\mu}{\lambda + \mu})(\frac{\lambda}{\lambda + \mu})^i$$

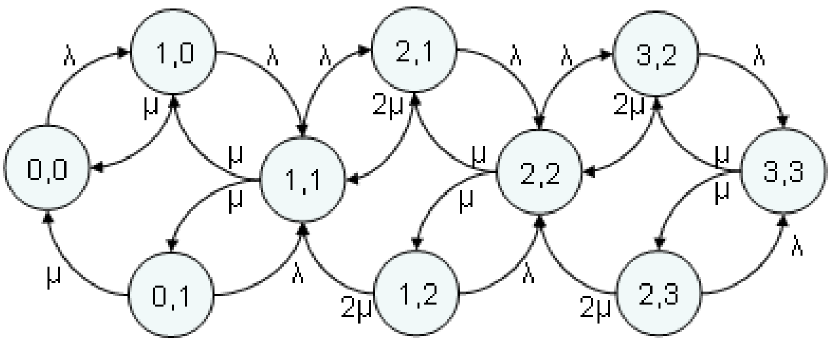
2. El tiempo promedio que permanece una propuesta en el escritorio es :$\frac{1}{\mu}$.
El número promedio de propuestas en el escritorio es :

$$L_{propuestas} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (\frac{\mu}{\lambda + \mu})(\frac{\lambda}{\lambda + \mu})^i$$

Usando la serie : $\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \rho^i = \frac{\rho}{(1-\rho^2)}$
se obtiene finalmente que :

$$L_{propuestas} = \frac{(\frac{\mu}{\lambda+\mu})(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})}{(1 - (\frac{\lambda}{\lambda+\mu}))^2}$$

3. Definiendo los estados como un par ordenado, en que la primera componente es el numero de autos en la estación 1 y la segunda componente como el nmero de autos en la estación 2, la cadena queda como sigue:



4. La cadena es finita y todos los estados están comunicados, por lo que tiene probabilidades estacionarias y no hay necesidad de imponer condición alguna sobre las tasas .

   a) La fracción de clientes que en una hora no puede ingresar a la planta es : $\Pi_{3,3}$

   b) El número promedio de autos en espera, en la planta esta dado por:

$$L_q = 1 \cdot (\pi_{1,2} + \pi_{2,1}) + 2 \cdot \pi_{2,2} + 3 \cdot (\pi_{2,3} + \pi_{3,2}) + 4 \cdot \pi_{3,3}$$

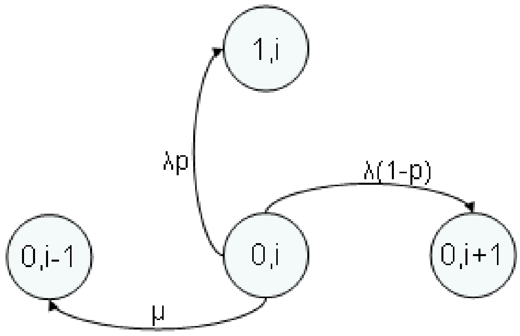
   c) El tiempo promedio de espera en cola de un auto antes de ser atendido, está dado por la fórmula de Little:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}} = \frac{1 \cdot (\pi_{1,2} + \pi_{2,1}) + 2 \cdot \pi_{2,2} + 3 \cdot (\pi_{2,3} + \pi_{3,2}) + 4 \cdot \pi_{3,3}}{\lambda \cdot (1 - \pi_{3,3})}$$

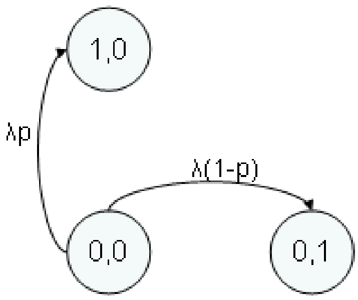
Pregunta 2

1. Los estados de la cadena de Markov serán pares ordenados. La primera componente nos indicará cuantos clientes tipo 1 se encuentran en el sistema. La segunda componente nos dirá cuantos clientes tipo 2 hay. Claramente mientras haya clientes tipo 1 en el sistema se estará atendiendo a un cliente tipo 1. Existen 3 clases de estados que generalizan toda la cadena (optamos por no escribir el grafo completo).

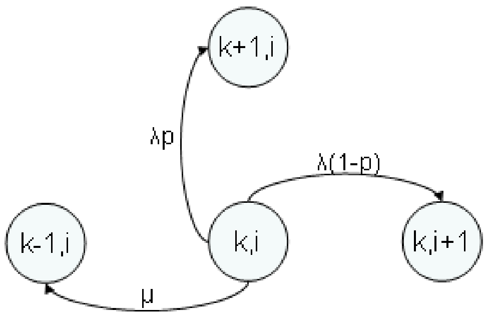
   La primera clase, se refiere a cuando hay personas tipo 2 y nadie tipo 1:



La segunda clase se refiere a cuando no hay gente en el sistema:



La tercera clase se refiere a cuando hay personas tipo 1:



2. Las ecuaciones de estado estacionario son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
\pi_{j,i}(\lambda+\mu) &= \pi_{j-1,i}\lambda\cdot p+\pi_{j,i-1}\cdot\lambda\cdot(1-p)+\pi_{j+1,i}\cdot\mu \\
\pi_{j,0}(\lambda+\mu) &= \pi_{j-1,0}\lambda\cdot p+\pi_{j+1,0}\cdot\mu \\
\pi_{0,i}(\lambda+\mu) &= \pi_{0,i-1}\lambda\cdot(1-p)+\pi_{1,i}\cdot\mu \\
\pi_{0,0}(\lambda+\mu) &= \pi_{0,1}\cdot\mu+\pi_{1,0}\cdot\mu \\
\sum_{i,j}\pi_{i,j} &= 1
\end{aligned}
$$

3. Los clientes tipo 1 enfrentan un sistema M/M/1. Por lo tanto se aplican las formulas de este sistema:

$$W_1=\frac{1}{\mu-\lambda\cdot p}$$

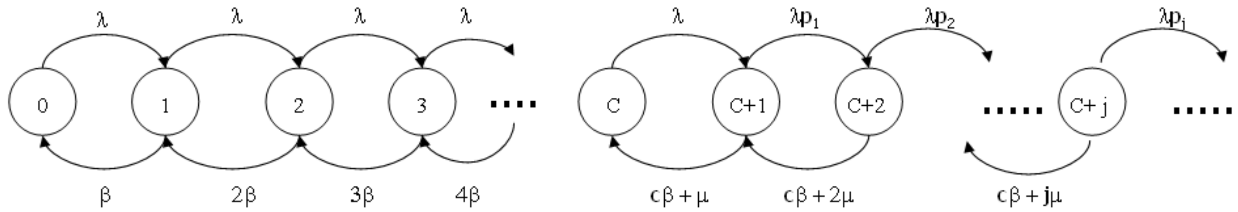
4. Utilizando las probabilidades estacionarias podemos calcular el número promedio de gente en el sistema. Con la formula de Little podemos calcular W_T, el tiempo de espera promedio de una persona cualquiera. Sin embargo sabemos que una persona cualquiera es tipo 1 con probabilidad p. Entonces para calcular W_2,el tiempo promedio de espera de un cliente tipo 2, debemos realizar el siguiente cálculo:

$$W_T = p \cdot W_1 + (1-p) \cdot W_2$$

Donde la única incognita es W_2.

Problema 3

1. Como es costumbre modelamos el número de personas en el sistema. La cadena toma la siguiente forma:



2. Al igual que en una cadena M/M/∞ solo necesitamos que μ sea positivo, ya que la tasa de muerte es creciente y la de nacimineto está acotada por λ. Las expresiones necesarias para calcularlas son las siguientes:

$$\pi_i = \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^i \cdot \pi_0 \quad , \quad , \forall i \leq C$$

$$\pi_i = \frac{\lambda^i}{C! \cdot \beta^C} \cdot \prod_{j=0}^{i-C-1} \frac{P_j}{C\beta + (j+1) \cdot \mu} \pi_0 \qquad \forall i > C$$

Donde:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{C} \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^i + \sum_{i=C+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{C! \cdot \beta^C} \cdot \prod_{j=0}^{i-C-1} \frac{P_j}{C\beta + (j+1) \cdot \mu}}$$

3. Supondremos conocidos los valores de las probabilidades estacionarias.

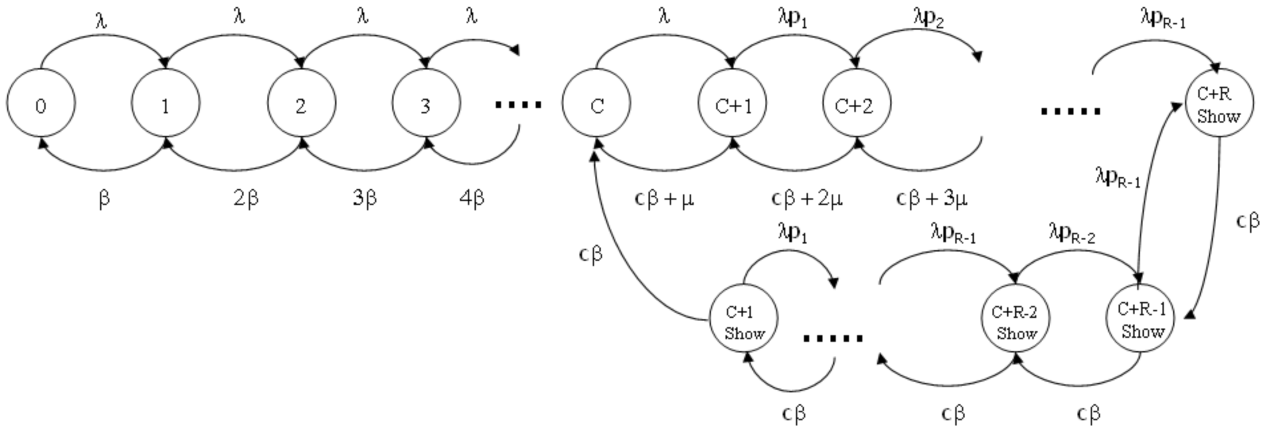
   a) Razonamos calculando casos favorables sobre casos totales. Claramente los casos totales están dados por la cantidad de clientes que llegan en una hora (λ). Los casos favorables son los siguientes:

   $$C.F. = \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot \lambda \cdot (1 - P_{i-C})$$

   Entonces:

   $$E[\% \text{ Clientes que no entran}] = \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot (1 - P_{i-C})$$

   b) Considerando a todos los clientes: λ (sin comentarios)
   Sin considerar a los que entran: $\lambda \cdot (1 - \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot (1 - P_{i-C}))$.



4. La nueva situación puede ser modelada de la siguiente forma:
   Acá hemos diferenciado explícitamente los estados en los cuales el guardia se encuentra en el escenario.

Dudas y/o errores:
Patricio Hernández G.
shernand@ing.uchile.cl