

# MATEMÁTICAS APLICADAS – PRIMAVERA 2004

## SECCIÓN 1

JUAN DÁVILA & MAURICIO DUARTE

### 1. CLASE AUXILIAR VII, 27 SEPTIEMBRE DE 2004

#### PROBLEMA 1

Usando la fórmula integral de Cauchy apropiadamente, calcule

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz,$$

donde  $\Gamma = \partial D(0, 3)$  es la circunferencia de centro 0 y radio 3, recorrida en sentido antihorario.

#### PROBLEMA 2

Demuestre que para todo par de enteros  $n > k \geq 1$ ,

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz,$$

donde  $\Gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$  es cualquier camino cerrado y simple que encierra al origen, y que se recorre en sentido antihorario. Usando lo anterior, calcule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}.$$

#### PROBLEMA 3

Pruebe que si  $f$  es una función entera y  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \Re f(z) = 0$  entonces  $f \equiv 0$ .

#### PROBLEMA 4

Para la función definida a continuación, estudie sus singularidades indicando su tipo: polos (de que orden), removibles o esenciales. Calcule los residuos en cada singularidad.

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3 + z^5}.$$