

EXTRAS CLASE AUXILIAR 300804
MA26B-01

PROFESOR: JUAN DÁVILA B.
AUXILIAR: MAURICIO DUARTE E.

1. PROBLEMA EXTRA

Dada la consulta de algunos alumnos acerca de este problema, les presento una solución bastante simple.

PROBLEMA

Dada una función continua y no nula $g : [0, l_0] \longrightarrow \mathbb{R}$, pruebe que existe una curva plana $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ de longitud l_0 tal que su curvatura está dada por $|g|$.

Indicación. Defina

$$\theta(s) = \int_0^s g(\tau) d\tau; \quad x(s) = \int_0^s \cos \theta(\tau) d\tau; \quad y(s) = \int_0^s \sin \theta(\tau) d\tau$$

y estudie $\vec{\sigma}(s) = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j}$.

SOLUCIÓN

Naturalmente, consideramos la curva parametrizada por

$$\vec{\sigma}(s) = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j}.$$

Es evidente que es una curva plana dado que no tiene componente según \hat{k} , es decir está contenida en el plano XY.

Dado además que g es continua y no nula entonces las funciones $x(s)$ e $y(s)$ están bien definidas. *Esto último no me parece realmente relevante de todas maneras.*

Calculemos el vector tangente:

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}'(s) &= \frac{d\vec{\sigma}}{ds}(s) \\
 &= x'(s)\hat{i} + y'(s)\hat{j} \\
 &= \frac{d}{ds} \int_0^s \cos \theta(\tau) d\tau \hat{i} + \frac{d}{ds} \int_0^s \sin \theta(\tau) d\tau \hat{j} \\
 &= \cos \theta(s)\hat{i} + \sin \theta(s)\hat{j}
 \end{aligned}$$

y en particular

$$\|\vec{\sigma}'(s)\|^2 = \cos^2 \theta(s) + \sin^2 \theta(s) = 1,$$

de donde se deduce que esta curva está parametrizada en longitud de arco.

El vector normal:

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}''(s) &= \frac{d\vec{\sigma}'}{ds}(s) \\
 &= \frac{d}{ds} \cos \theta(s)\hat{i} + \frac{d}{ds} \sin \theta(s)\hat{j} \\
 &= -\sin \theta(s) \cdot \theta'(s)\hat{i} + \cos \theta(s) \cdot \theta'(s)\hat{j} \\
 &= \{-\sin \theta(s)\hat{i} + \cos \theta(s)\hat{j}\} \frac{d}{ds} \int_0^s g(\tau) d\tau \\
 &= \{-\sin \theta(s)\hat{i} + \cos \theta(s)\hat{j}\} g(s).
 \end{aligned}$$

Como la curva está parametrizada en longitud de arco calculamos la curvatura κ :

$$\begin{aligned}
 \kappa(s)^2 &= \|\vec{\sigma}''(s)\|^2 \\
 &= \{\cos^2 \theta(s) + \sin^2 \theta(s)\} \cdot g(s)^2 \\
 &= g(s)^2; \\
 \kappa(s) &= |g(s)| \\
 &= |g|(s).
 \end{aligned}$$

Con lo que se prueba que la curvatura de $\vec{\sigma}$ es igual a $|g|$.