

CLASE AUXILIAR 5
30 AGOSTO 2004

PROBLEMA 1

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo de clase \mathcal{C}^2 .

- (a) Sea S_ε el casquete esférico de radio ε centrado en el origen y orientado según la normal exterior. Pruebe directamente que si $r = \|\vec{r}\|$ y $\hat{r} = \frac{1}{r}\vec{r}$ entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \left[\frac{1}{r} \nabla f + f \frac{\hat{r}}{r^2} \right] \cdot d\vec{s} = 4\pi f(0).$$

- (b) Sea $g(\vec{r}) = \frac{1}{\|\vec{r}\|}$. Compruebe que $\Delta g = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
(c) Sea S una superficie cerrada regular que encierra el origen. Suponiendo $\Delta f = 0$ en \mathbb{R}^3 , deduzca que

$$f(0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r} \nabla f + f \frac{\hat{r}}{r^2} \right] \cdot d\vec{s}.$$

PROBLEMA 2

Sea \vec{X} un campo de clase \mathcal{C}^1 definido en todo \mathbb{R}^3 , tal que su primera componente es idénticamente nula, y su segunda componente $B(x, y, z)$ verifica $B(0, y, 0) = 3y^2$, $B(1, y, 0) = 8y^3$. Hallar el flujo del rotor de \vec{X} a través de la superficie con borde, parametrizada por:

$$\begin{cases} x = u & 0 \leq u \leq 1 \\ y = v & 0 \leq v \leq 1 \\ z = uv(1-u)(1-v) \end{cases}$$

orientada con la normal con tercera componente positiva.

PROBLEMA 3

Sea $P(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$, $Q(x, y) = x/(x^2 + y^2)$. Suponiendo que D sea el disco unitario

- (a) Calcular $\int Pdx + Qdy$ en forma directa.
(b) Calcular $\int Pdx + Qdy$ por el teorema de Green en el plano.
(c) ¿Coinciden los resultados? ¿Por qué?

PROBLEMA 4

Sea la función escalar

$$f(x, y, z) = 2 \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

definida en el abierto $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = 0, y = 0\}$.

- (a) Verificar que f es armónica.

- (b) Calcular el flujo de ∇f a través de la superficies lateral del cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leq z \leq 1$, con la normal en el sentido opuesto al que apunta al eje de las z .
- (c) Hallar el flujo de ∇f a través de una superficie cerrada y acotada del espacio que no intersecta al eje de las z .
- (d) Hallar el flujo de ∇f a través de la superficie lateral del “barril” generado por la curva $\{x = 0, y = 2 - z^2 - 1 \leq z \leq 1\}$ al girar alrededor del eje de las z , orientada con la normal en el sentido opuesto al que apunta al eje de las z .