

CLASE AUXILIAR 4
23 AGOSTO 2004

PROBLEMA 1

Sea \mathcal{S} una superficie cerrada acotada en \mathbb{R}^3 orientada con la normal \vec{n} saliente. Muestre que el *volumen* de la región del espacio encerrada por \mathcal{S} es igual a un tercio del flujo del campo $\vec{X} = (x, y, z)$ a través de \mathcal{S} . Calcular el volumen del toro sólido que se obtiene haciendo girar en el espacio un círculo de radio r alrededor de un eje coplanar con él, que dista $a > r$ del centro del círculo.

PROBLEMA 2

Supongamos que un fluido está sometido a un campo de velocidades dado por

$$\vec{v}(x, y, z) = (x - yz)\hat{i} + (y + xz)\hat{j} + (z + 2xy)\hat{k}.$$

Sea \mathcal{S}_1 la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ que está dentro de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Sea \mathcal{S}_2 la porción de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 2$. Sea Ω el volumen limitado por \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 .

- (a) Calcule directamente $\Phi_1 = \iint_{\mathcal{S}_1} \vec{v} \cdot \hat{n} dA$ con \hat{n} la normal interior al cilindro.
- (b) Utilizando el teorema de la divergencia, calcule el flujo neto Φ que pasa a través de las paredes de la región Ω .
- (c) Calcule directamente el flujo Φ_2 a través de \mathcal{S}_2 orientada según la normal exterior a la esfera. Compruebe el teorema de la divergencia.

PROBLEMA 3

Sea $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^3$ una región cerrada y acotada. Muestre que, siendo $\partial\mathcal{T}$ la frontera de \mathcal{T} y \vec{F} una función suficientemente regular, entonces

$$\iint_{\partial\mathcal{T}} \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0.$$

PROBLEMA 4

Utilice el teorema de Green en el plano para calcular el área de la región encerrada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.

Indicación. Considere la curva plana parametrizada por $x = 8 \cos^3 \theta$ e $y = 8 \sin^3 \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

PROBLEMA 5

Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo de clase \mathcal{C}^2 .

- (a) Sea \mathcal{S}_ε el casquete esférico de radio ε centrado en el origen y orientado según la normal exterior. Pruebe directamente que si $r = \|\vec{r}\|$ y $\hat{r} = \frac{1}{r}\vec{r}$ entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathcal{S}_\varepsilon} \left[\frac{1}{r} \nabla f + f \frac{\hat{r}}{r^2} \right] \cdot d\vec{s} = 4\pi f(0).$$

- (b) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto de frontera regular $\partial\Omega$ y sea g un campo escalar de clase \mathcal{C}^2 en un abierto que contiene a $\Omega \cup \partial\Omega$. Demuestre que

$$\iiint_{\Omega} [g\Delta f - f\Delta g] dV = \iint_{\partial\Omega} [g\nabla f - f\nabla g] \cdot d\vec{s}.$$

- (c) Sea $g(\vec{r}) = \frac{1}{\|\vec{r}\|}$. Compruebe que $\Delta g = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
 (d) Sea \mathcal{S} una superficie cerrada regular que encierra el origen. Suponiendo $\Delta f = 0$ en \mathbb{R}^3 , deduzca que

$$f(0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{S}} \left[\frac{1}{r} \nabla f + f \frac{\hat{r}}{r^2} \right] \cdot d\vec{s}.$$